

材料力学を楽しむ会 2019年度 第1回

I 非線形問題の解析

- 一 弾塑性解析ひずみ増分理論
- 一 有限ひずみ

II 新しい材料力学 第4版

材料力学を学ぶ枠組み

III 試験問題の研究

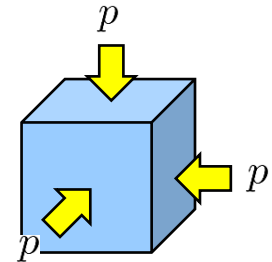
2019年1月19日

AN 技術士事務所

中本 昭

金属の塑性変形の特徴

- 降伏応力は静水圧に依存しない
- 塑性変形は体積変化を伴わない
- ひずみは弾性ひずみと塑性ひずみに分けられる
- 応力成分は等方成分と偏差成分に分ける
- ひずみは等方成分と偏差成分に分ける



$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

静水圧

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - p & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & e_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & e_z \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$$

全ひずみ理論とひずみ増分理論

負荷過程 ($d\sigma_{eq} > 0$) において

全ひずみ理論

$$\varepsilon_{eq} = G(\sigma_{eq})$$



$\neq$



ひずみ増分理論

$$d\varepsilon_{eq} = F(\sigma_{eq}, d\sigma_{eq})$$

$$\varepsilon_{eq} = \int d\varepsilon_{eq}$$

ただし,
比例負荷*の場合,
両者は一致する

* 比例負荷

変形の全過程を通じて応力主軸が材料に対して回転せず,
応力成分比が一定に保たれたまま単調に増加すること

一般負荷に対してはひずみ増分理論の方が合理的で, 実験結果も味方している

ひずみ増分理論

ひずみ増分は弾性部分と塑性部分に分けられる

- 均質・等方性
- ひずみ速度非依存性
- 非圧縮性

全ひずみ理論とひずみ増分理論

ある時刻 t におけるある位置 (x, y, z) の応力 $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ とひずみ $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ が微小時間 dt 後にそれぞれ $(d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z)$ および $(d\varepsilon_x, d\varepsilon_y, d\varepsilon_z)$ だけ変化したものとする、この応力とひずみの微小変化を**応力増分**および**ひずみ増分**とよぶ。また、 $d\sigma/dt$ を**応力速度**、 $d\varepsilon/dt$ を**ひずみ速度**とよぶ。

塑性ひずみと応力を 1 対 1 に対応させる理論を**全ひずみ理論**、ひずみ増分を応力および応力増分と関係づける理論を**ひずみ増分理論**とよぶ。

微小ひずみでミーゼスの降伏条件に従う弾塑性体について考える。

ひずみ ε を弾性ひずみ ε^e と塑性ひずみ ε^p に分ける。

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^e + \varepsilon_1^p, \varepsilon_2 = \varepsilon_2^e + \varepsilon_2^p, \varepsilon_3 = \varepsilon_3^e + \varepsilon_3^p \quad (2)$$

ひずみ増分理論

ひずみ増分は弾性成分と塑性成分に分けられる。

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x &= d\varepsilon_x^e + d\varepsilon_x^p & d\gamma_{xy} &= d\gamma_{xy}^e + d\gamma_{xy}^p \\ d\varepsilon_y &= d\varepsilon_y^e + d\varepsilon_y^p & d\gamma_{yz} &= d\gamma_{yz}^e + d\gamma_{yz}^p \\ d\varepsilon_z &= d\varepsilon_z^e + d\varepsilon_z^p & d\gamma_{zx} &= d\gamma_{zx}^e + d\gamma_{zx}^p \end{aligned} \quad (16)$$

仮定 i：弾性ひずみ増分は応力増分に比例する。

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x^e &= \frac{1}{E} \{d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)\} \\ d\varepsilon_y^e &= \frac{1}{E} \{d\sigma_y - \nu(d\sigma_z + d\sigma_x)\} \\ d\varepsilon_z^e &= \frac{1}{E} \{d\sigma_z - \nu(d\sigma_x + d\sigma_y)\} \\ d\gamma_{xy}^e &= \frac{d\tau_{xy}}{G}, \quad d\gamma_{yz}^e = \frac{d\tau_{yz}}{G}, \quad d\gamma_{zx}^e = \frac{d\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \quad (17)$$

あるいは、等方成分と偏差成分に分ければ、

$$\begin{aligned} \frac{de_x^e}{ds_x} &= \frac{de_y^e}{ds_y} = \frac{de_z^e}{ds_z} = \frac{d\gamma_{yz}^e/2}{d\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}^e/2}{d\tau_{zx}} = \frac{d\gamma_{xy}^e/2}{d\tau_{xy}} = \frac{1}{2G} \\ d\varepsilon_m^e &= \frac{d\sigma_m}{3K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} de_x^e &= d\varepsilon_x^e - d\varepsilon_m^e \\ de_y^e &= d\varepsilon_y^e - d\varepsilon_m^e \\ de_z^e &= d\varepsilon_z^e - d\varepsilon_m^e \\ d\varepsilon_m^e &= \frac{d\varepsilon_x^e + d\varepsilon_y^e + d\varepsilon_z^e}{3} \\ ds_x &= d\sigma_x - d\sigma_m \\ ds_y &= d\sigma_y - d\sigma_m \\ ds_z &= d\sigma_z - d\sigma_m \end{aligned}$$

(18)

ひずみ増分理論

仮定 ii：塑性ひずみ増分の偏差成分はそのときの偏差応力に比例する。

$$\frac{de_x^p}{s_x} = \frac{de_y^p}{s_y} = \frac{de_z^p}{s_z} = \frac{d\gamma_{yz}^p/2}{\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}^p/2}{\tau_{zx}} = \frac{d\gamma_{xy}^p/2}{\tau_{xy}} = d\lambda \quad (19)$$

$d\lambda$ は正の比例定数であるが定数ではなく、材料の加工硬化則によって決まる量である。

ただし,

$$de_x^p = d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_m^p$$

$$de_y^p = d\varepsilon_y^p - d\varepsilon_m^p$$

$$de_z^p = d\varepsilon_z^p - d\varepsilon_m^p$$

$$d\varepsilon_m^p = \frac{d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_y^p + d\varepsilon_z^p}{3}$$

仮定 iii：塑性ひずみ増分によって体積は変わらない。

$$d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_y^p + d\varepsilon_z^p = 0 \quad (20)$$

(20)式より、垂直塑性ひずみ増分の平均値 $d\varepsilon_m^p$ はゼロとなり、塑性ひずみ増分の偏差成分 $de_x^p, \dots$ に等しい。したがって,

$$\frac{d\varepsilon_x^p}{s_x} = \frac{d\varepsilon_y^p}{s_y} = \frac{d\varepsilon_z^p}{s_z} = \frac{d\gamma_{yz}^p/2}{\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}^p/2}{\tau_{zx}} = \frac{d\gamma_{xy}^p/2}{\tau_{xy}} = d\lambda \quad (21)$$

ひずみ増分理論

(17), (21) 式を (16) 式に代入し (8) 式を考慮すれば,

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \{d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)\} + \frac{2}{3} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \right) d\lambda \\
 d\varepsilon_y &= \frac{1}{E} \{d\sigma_y - \nu(d\sigma_z + d\sigma_x)\} + \frac{2}{3} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} \right) d\lambda \\
 d\varepsilon_z &= \frac{1}{E} \{d\sigma_z - \nu(d\sigma_x + d\sigma_y)\} + \frac{2}{3} \left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) d\lambda \\
 \frac{d\gamma_{xy}}{2} &= \frac{d\tau_{xy}}{2G} + \tau_{xy}d\lambda \\
 \frac{d\gamma_{yz}}{2} &= \frac{d\tau_{yz}}{2G} + \tau_{yz}d\lambda \\
 \frac{d\gamma_{zx}}{2} &= \frac{d\tau_{zx}}{2G} + \tau_{zx}d\lambda
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

$$s_x = \frac{2}{3} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \right), \dots$$

となる。また,

$$d\varepsilon_m = \frac{d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z}{3} \tag{23}$$

(18), (20) 式より,

$$d\varepsilon_m = \frac{d\sigma_m}{3K} \tag{24}$$

ひずみ増分理論

一方、偏差成分については(17)(18) 式より、

$$\begin{aligned}
 de_x &= de_x^e + de_x^p = \frac{ds_x}{2G} + s_x d\lambda \\
 de_y &= de_y^e + de_y^p = \frac{ds_y}{2G} + s_y d\lambda \\
 de_z &= de_z^e + de_z^p = \frac{ds_z}{2G} + s_z d\lambda \\
 \frac{d\gamma_{xy}}{2} &= \frac{d\gamma_{xy}^e}{2} + \frac{d\gamma_{xy}^p}{2} = \frac{d\tau_{xy}}{2G} + \tau_{xy} d\lambda \\
 \frac{d\gamma_{yz}}{2} &= \frac{d\gamma_{yz}^e}{2} + \frac{d\gamma_{yz}^p}{2} = \frac{d\tau_{yz}}{2G} + \tau_{yz} d\lambda \\
 \frac{d\gamma_{zx}}{2} &= \frac{d\gamma_{zx}^e}{2} + \frac{d\gamma_{zx}^p}{2} = \frac{d\tau_{zx}}{2G} + \tau_{zx} d\lambda
 \end{aligned} \tag{25}$$

比例係数 $d\lambda$ を決定するために材料の加工硬化を導入する。

ミーゼスの降伏条件にしたがう場合、相当応力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_{eq} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)}
 \end{aligned} \tag{26}$$

ひずみ増分理論

一方、相当塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{eq}^p$ を次式で定義する。

$$d\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{d\varepsilon_x^{p2} + d\varepsilon_y^{p2} + d\varepsilon_z^{p2} + \frac{1}{2} (d\gamma_{yz}^{p2} + d\gamma_{zx}^{p2} + d\gamma_{xy}^{p2})} \quad (27)$$

(21) 式を (27) 式に代入すれば,

$$d\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)} d\lambda \quad (28)$$

上式に (26) 式を代入して $d\lambda$ が求まる。

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}} \quad (29)$$

ひずみ増分理論では、相当塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{eq}^p$ をひずみ経路に沿って積分した値

$$\varepsilon_{eq}^p = \int d\varepsilon_{eq}^p \quad (30)$$

を相当塑性ひずみとよび、相当応力との関係は一軸引張における塑性ひずみと応力の関係と同一であると仮定している。

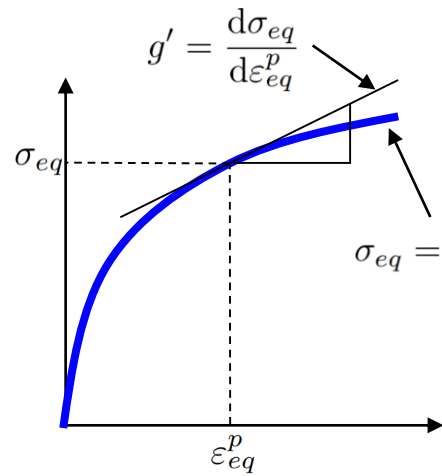
ひずみ増分理論

相当塑性ひずみと相当応力の間に次式が成立すると仮定する。

$$\int d\varepsilon_{eq}^p = f(\sigma_{eq})$$

or

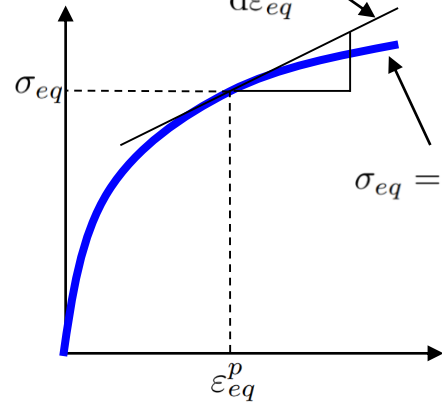
$$\sigma_{eq} = g\left(\int d\varepsilon_{eq}^p\right)$$



(31)

加工硬化曲線の傾き g' は,

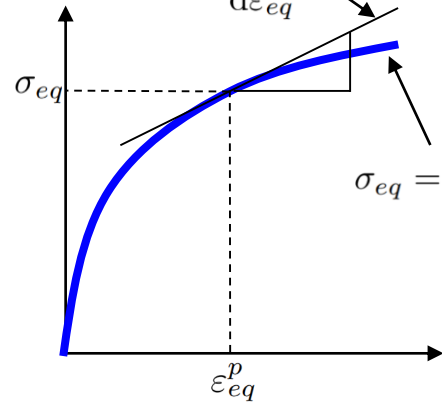
$$g' = \frac{d\sigma_{eq}}{d\varepsilon_{eq}^p}$$



(32)

で与えられる。(29) 式に代入すると $d\lambda$ が次式で計算できる。

$$d\lambda = \frac{3}{2g'} \frac{d\sigma_{eq}}{\sigma_{eq}}$$



(33)

これを (22) に代入して次式を得る。(Hill の方程式)

ひずみ増分理論

$$\begin{aligned}
d\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \{d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)\} + \frac{\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2}}{g\sigma'_{eq}} d\sigma_{eq} & \frac{d\gamma_{xy}}{2} &= \frac{d\tau_{xy}}{2G} + \frac{3}{2g'} \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{eq}} d\sigma_{eq} \\
d\varepsilon_y &= \frac{1}{E} \{d\sigma_y - \nu(d\sigma_z + d\sigma_x)\} + \frac{\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}}{g\sigma'_{eq}} d\sigma_{eq} & \frac{d\gamma_{yz}}{2} &= \frac{d\tau_{yz}}{2G} + \frac{3}{2g'} \frac{\tau_{yz}}{\sigma_{eq}} d\sigma_{eq} \\
d\varepsilon_z &= \frac{1}{E} \{d\sigma_z - \nu(d\sigma_x + d\sigma_y)\} + \frac{\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}}{g\sigma'_{eq}} d\sigma_{eq} & \frac{d\gamma_{zx}}{2} &= \frac{d\tau_{zx}}{2G} + \frac{3}{2g'} \frac{\tau_{zx}}{\sigma_{eq}} d\sigma_{eq}
\end{aligned} \tag{34}$$

また、(25) に代入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned}
de_x &= \frac{ds_x}{2G} + \frac{3}{2g'} \frac{s_x}{\sigma_{eq}} d\sigma_{eq} & \frac{d\gamma_{xy}}{2} &= \frac{d\tau_{xy}}{2G} + \frac{3}{2g'} \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{eq}} d\sigma_{eq} \\
de_y &= \frac{ds_y}{2G} + \frac{3}{2g'} \frac{s_y}{\sigma_{eq}} d\sigma_{eq} & \frac{d\gamma_{yz}}{2} &= \frac{d\tau_{yz}}{2G} + \frac{3}{2g'} \frac{\tau_{yz}}{\sigma_{eq}} d\sigma_{eq} \\
de_z &= \frac{ds_z}{2G} + \frac{3}{2g'} \frac{s_z}{\sigma_{eq}} d\sigma_{eq} & \frac{d\gamma_{zx}}{2} &= \frac{d\tau_{zx}}{2G} + \frac{3}{2g'} \frac{\tau_{zx}}{\sigma_{eq}} d\sigma_{eq}
\end{aligned} \tag{35}$$

(34) (35) 式は応力と応力増分からひずみ増分を求める式である。

ひずみ増分理論

σ_{eq} は (26) 式で与えられ, g' は σ_{eq} の既知関数である。また, $d\sigma_{eq}$ は σ_{eq} の増分であり,

$$\begin{aligned} d\sigma_{eq} &= \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial s_x} ds_x + \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial s_y} ds_y + \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial s_z} ds_z + \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz} + \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \tau_{zx}} d\tau_{zx} + \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} \\ &= \frac{3}{2\sigma_{eq}} \{s_x ds_x + s_y ds_y + s_z ds_z + 2(\tau_{yz} d\tau_{yz} + \tau_{zx} d\tau_{zx} + \tau_{xy} d\tau_{xy})\} \end{aligned} \quad (36)$$

(34), (35) 式 (Hill の方程式) は負荷過程 (36) 式の右辺が正となるような応力経路に限って適用される。

相当塑性ひずみ増分

複雑な応力状態における塑性ひずみ増分について、単軸負荷での軸方向塑性ひずみ増分に相当する量、すなわち、相当塑性ひずみ増分 $d\varepsilon_{eq}^p$ を定義する。

その方法は、複雑な応力状態において塑性変形を生じさせるエネルギーすなわち塑性仕事増分 dW^p が、相当応力 σ_{eq} のもとで相当塑性ひずみ $d\varepsilon_{eq}^p$ を生じさせるエネルギーと等価であると考えて求める。

単位体積当たりの塑性仕事増分 dW^p は、応力 $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$ と塑性ひずみ $d\varepsilon_x^p, \dots, d\gamma_{xy}^p, \dots$ の積和として求められる。

$$dW^p = \sigma_x d\varepsilon_x^p + \sigma_y d\varepsilon_y^p + \sigma_z d\varepsilon_z^p + \tau_{xy} d\gamma_{xy}^p + \tau_{yz} d\gamma_{yz}^p + \tau_{zx} d\gamma_{zx}^p \quad (37)$$

仮定 iii より (37) 式は次式のように書ける。

$$dW^p = s_x d\varepsilon_x^p + s_y d\varepsilon_y^p + s_z d\varepsilon_z^p + \tau_{xy} d\gamma_{xy}^p + \tau_{yz} d\gamma_{yz}^p + \tau_{zx} d\gamma_{zx}^p \quad (38)$$

(38) 式が相当応力と相当塑性ひずみの積の形になるように、相当応力の式 (12) 式と (21) 式を使って変形すると、

相当塑性ひずみ増分

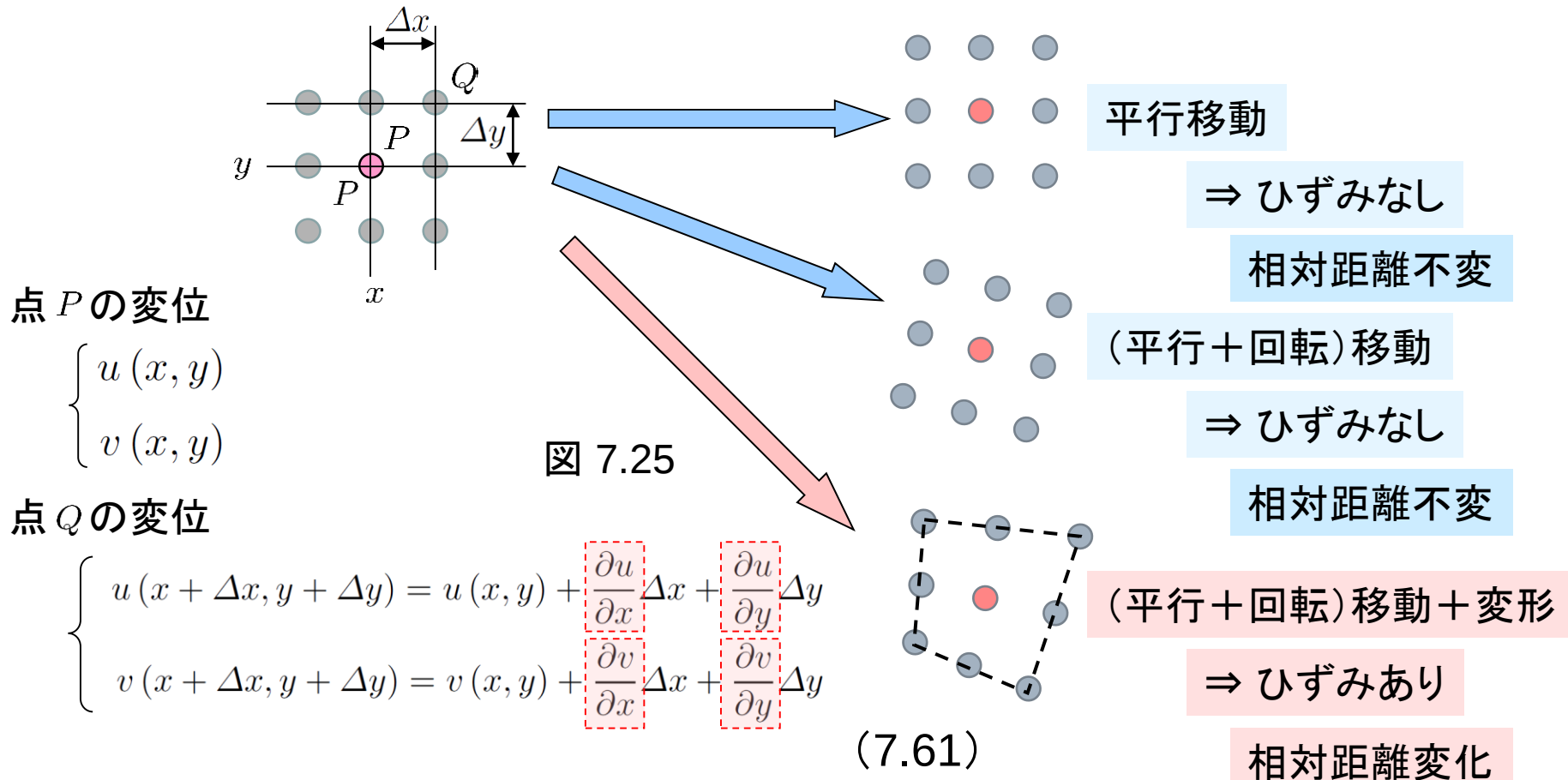
$$\begin{aligned}
dW^p &= s_x d\varepsilon_x^p + s_y d\varepsilon_y^p + s_z d\varepsilon_z^p + \tau_{xy} d\gamma_{xy}^p + \tau_{yz} d\gamma_{yz}^p + \tau_{zx} d\gamma_{zx}^p \\
&= \left(\sqrt{s_x d\varepsilon_x^p + s_y d\varepsilon_y^p + s_z d\varepsilon_z^p + \tau_{xy} d\gamma_{xy}^p + \tau_{yz} d\gamma_{yz}^p + \tau_{zx} d\gamma_{zx}^p} \right)^2 \\
&= \sqrt{s_x (d\lambda s_x) + s_y (d\lambda s_y) + s_z (d\lambda s_z) + \tau_{xy} (2d\lambda \tau_{xy}) + \tau_{yz} (2d\lambda \tau_{yz}) + \tau_{zx} (2d\lambda \tau_{zx})} \\
&\quad \times \sqrt{\left(\frac{d\varepsilon_x^p}{d\lambda} \right) d\varepsilon_x^p + \left(\frac{d\varepsilon_y^p}{d\lambda} \right) d\varepsilon_y^p + \left(\frac{d\varepsilon_z^p}{d\lambda} \right) d\varepsilon_z^p + \left(\frac{d\gamma_{xy}^p}{2d\lambda} \right) d\gamma_{xy}^p + \left(\frac{d\gamma_{yz}^p}{2d\lambda} \right) d\gamma_{yz}^p + \left(\frac{d\gamma_{zx}^p}{2d\lambda} \right) d\gamma_{zx}^p} \\
&= \sqrt{d\lambda} \sqrt{\frac{3}{2} \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + \frac{1}{2} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}} \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{d\lambda}} \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{d\varepsilon_x^{p2} + d\varepsilon_y^{p2} + d\varepsilon_z^{p2} + \frac{1}{2} (d\gamma_{xy}^{p2} + d\gamma_{yz}^{p2} + d\gamma_{zx}^{p2})}} \quad (39) \\
&= \sigma_{eq} \times \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{d\varepsilon_x^{p2} + d\varepsilon_y^{p2} + d\varepsilon_z^{p2} + \frac{1}{2} (d\gamma_{xy}^{p2} + d\gamma_{yz}^{p2} + d\gamma_{zx}^{p2})}}
\end{aligned}$$

塑性仕事増分を $dW^p = \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq}^p$ と定義すると, 相当塑性ひずみ $d\varepsilon_{eq}^p$ は

$$\begin{aligned}
d\varepsilon_{eq}^p &= \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{d\varepsilon_x^{p2} + d\varepsilon_y^{p2} + d\varepsilon_z^{p2} + \frac{1}{2} (d\gamma_{xy}^{p2} + d\gamma_{yz}^{p2} + d\gamma_{zx}^{p2})}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{d\varepsilon_1^{p2} + d\varepsilon_2^{p2} + d\varepsilon_3^{p2}}} \quad (40)
\end{aligned}$$

有限ひずみ

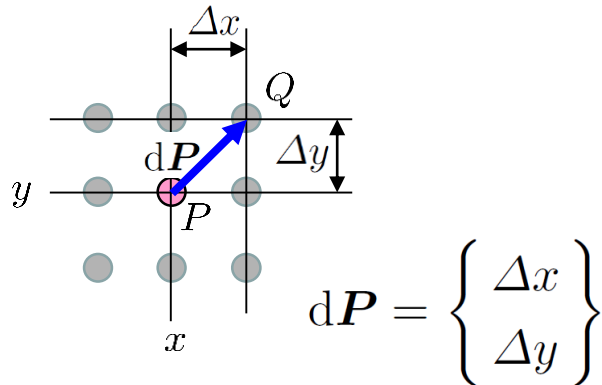
P. 106



- 点 Q の変位は点 P の変位と変位の勾配で表現できる
- 変位勾配の内容を調べれば変形と回転の様子がわかる

有限ひずみ

P. 106



$$d\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix}$$

Diagram showing a point P in a deformed configuration (right) with displacement vector $d\mathbf{p}$ to point Q . The displacement is decomposed into components Δx and Δy .

$$d\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \\ \Delta y + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \end{Bmatrix}$$

(7.62)

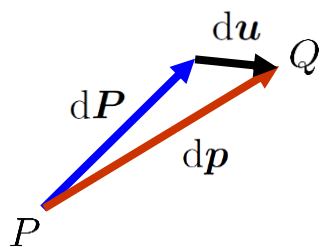


図 7.26

$$d\mathbf{u} = d\mathbf{p} - d\mathbf{P}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} = \underline{H} d\mathbf{P}$$

変位勾配テンソル

(7.63)

■ 変位勾配テンソル H は、ベクトル $d\mathbf{P}$ を変位ベクトル $d\mathbf{u}$ に変換する

有限ひずみ

P. 108

大きな変形をともなう大変形あるいは有限変形とよばれる問題に関しては、変形勾配テンソル F を利用する。

$$d\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} \quad (7.71)$$

$$= \mathbf{H} d\mathbf{P} + d\mathbf{P} = (\mathbf{H} + \mathbf{I}) d\mathbf{P}$$

$$= \mathbf{F} d\mathbf{P}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{I} \quad (7.72)$$

正則なテンソル F は、直交テンソル R と正定値対称テンソル U あるいは V の積に分解できる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (7.73)$$

このような分解を極分解といい、 $\mathbf{R}\mathbf{U}$ への分解を右極分解、 $\mathbf{V}\mathbf{R}$ への分解を左極分解とよぶ。

有限ひずみ

P. 108

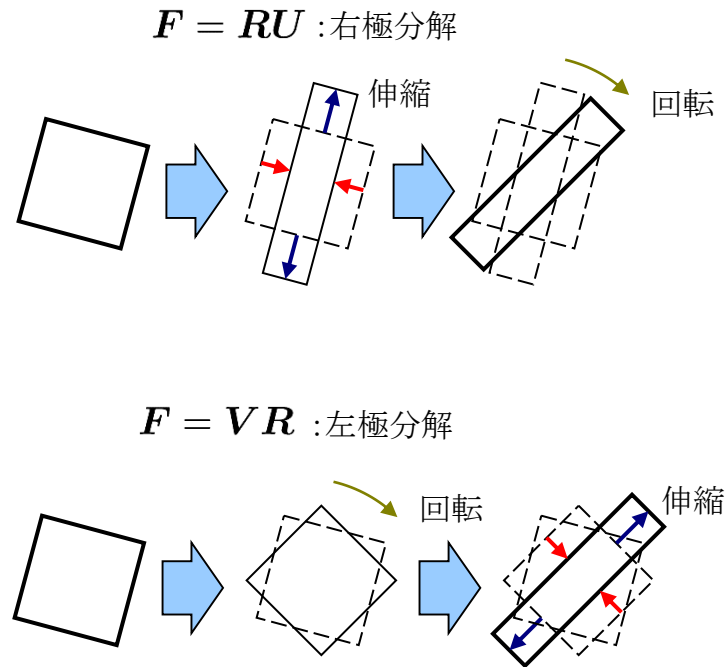
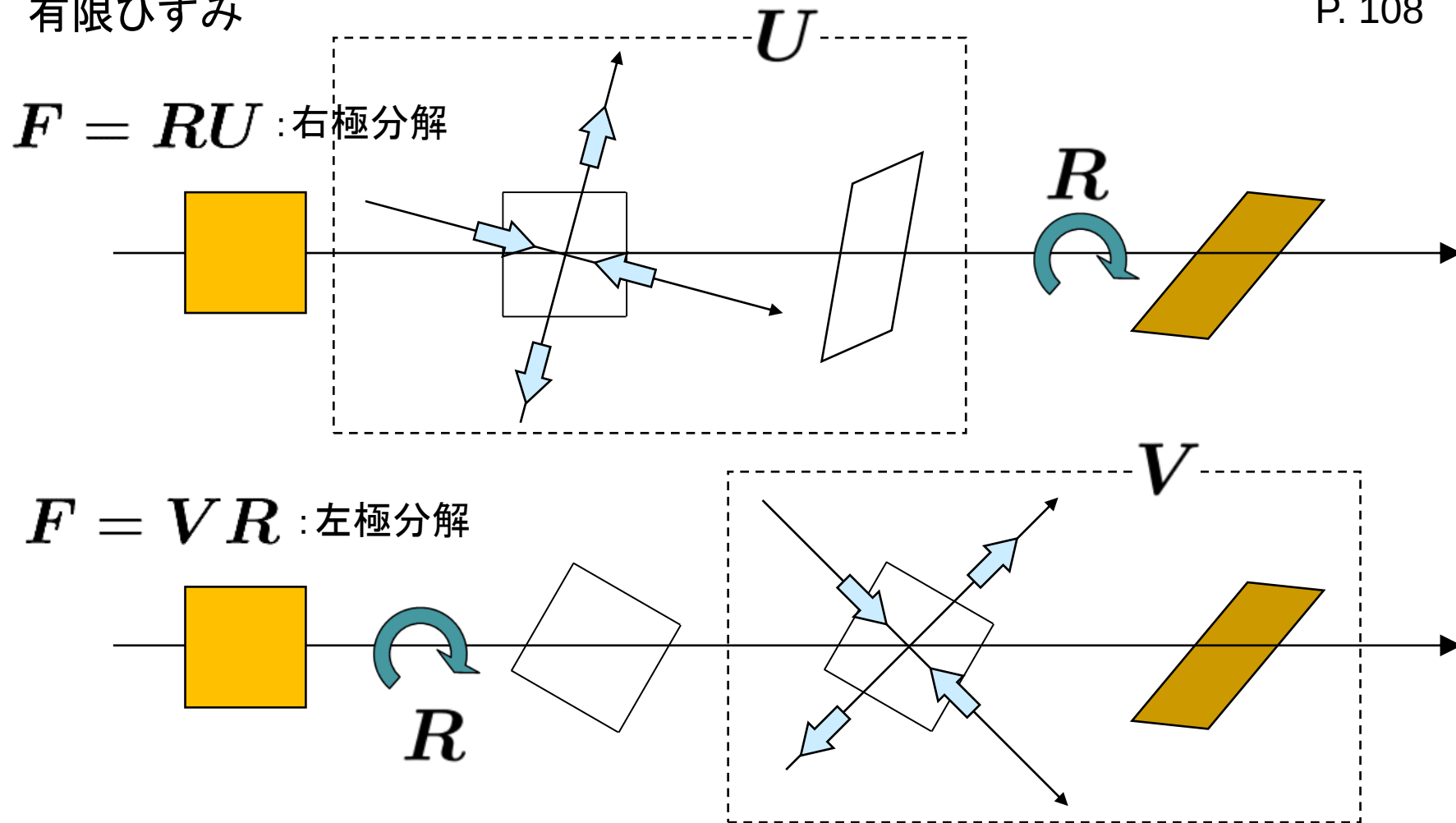


図 7.27

直交テンソル R と正定値対称テンソル U, V の機能

有限ひずみ

P. 108



直交テンソル R と正定値対称テンソル U, V の機能

有限ひずみ

追加

次の式が成り立つことを簡単な事例で確認しなさい

$$(AB)^T = B^T A^T \quad : \text{マトリックスの掛け算}$$

$$\mathbf{F}x \cdot \mathbf{F}x = x \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F})x \quad : \text{ベクトルのスカラー積}$$

$$(\mathbf{F}^{-1})^T (\mathbf{F}^{-1}) = (\mathbf{F} \mathbf{F}^T)^{-1} \quad : \text{マトリックスの掛け算}$$

有限ひずみテンソルを導くための準備

有限ひずみ

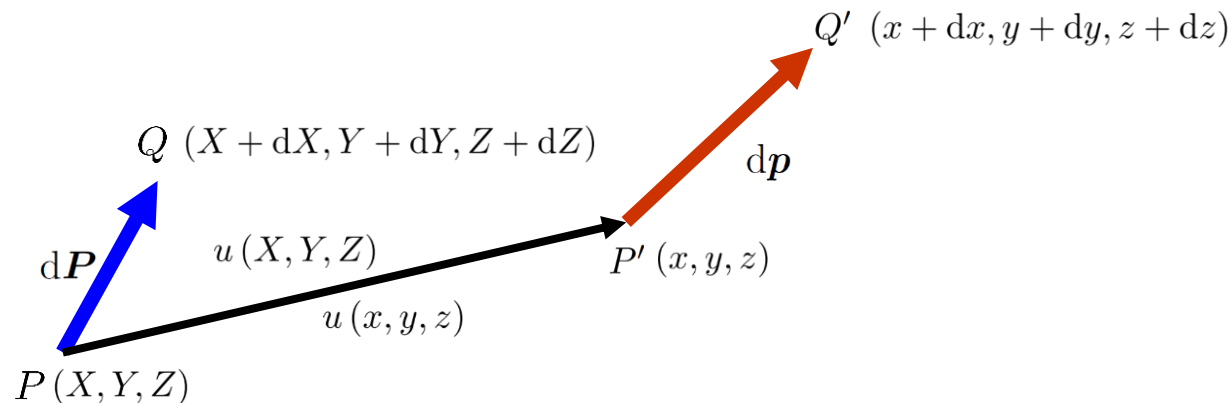
連続体の物理量を表現する2つの方法

物質表現(ラグランジュ法)

: ある時刻に占めていた物質点の座標 X と時刻 t で表現する

空間表現(オイラー法)

: 空間の座標 x と時刻 t で表現する



ラグランジュ的なものの見方とオイラー的な見方

有限ひずみ

変形前後の長さの2乗の関係

物質表示

$$d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = (\mathbf{F}d\mathbf{P}) \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{P}) = d\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{P} = d\mathbf{P} \cdot \mathbf{U}^2 d\mathbf{P} = d\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{P}$$

$\mathbf{C}$: 右コーシー – グリーン変形テンソル

空間表示

$$d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = (\mathbf{F}^{-1}d\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{F}^{-1}d\mathbf{p}) = d\mathbf{p} \cdot (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1} d\mathbf{p} = d\mathbf{p} \cdot (\mathbf{V}^2)^{-1} d\mathbf{p} = d\mathbf{p} \cdot \mathbf{b}^{-1} d\mathbf{p}$$

$\mathbf{b}$: 左コーシー – グリーン変形テンソル

変形前後の長さの2乗の差

$$d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} - d\mathbf{P} \cdot d\mathbf{P} = d\mathbf{P} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) d\mathbf{P} = d\mathbf{p} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) d\mathbf{p}$$

ひずみの定義

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1})$$

$\mathbf{E}$: ラグランジュ-グリーンのひずみテンソル

$\mathbf{e}$: オイラー-アルマンシのひずみテンソル

長さの2乗には回転を司る $\mathbf{R}$ が含まれない

有限ひずみ

ひずみの誘導

$$d\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{Bmatrix}, \quad d\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}, \quad d\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x - X \\ y - Y \\ z - Z \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x(X, Y, Z) \\ y = y(X, Y, Z) \\ z = z(X, Y, Z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial X} dX + \frac{\partial x}{\partial Y} dY + \frac{\partial x}{\partial Z} dZ \\ dy = \frac{\partial y}{\partial X} dX + \frac{\partial y}{\partial Y} dY + \frac{\partial y}{\partial Z} dZ \\ dz = \frac{\partial z}{\partial X} dX + \frac{\partial z}{\partial Y} dY + \frac{\partial z}{\partial Z} dZ \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(X, Y, Z) = x(X, Y, Z) - X \\ v(X, Y, Z) = y(X, Y, Z) - Y \\ w(X, Y, Z) = z(X, Y, Z) - Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial X} + 1, & \frac{\partial x}{\partial Y} = \frac{\partial u}{\partial Y}, & \frac{\partial x}{\partial Z} = \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} = \frac{\partial v}{\partial X}, & \frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{\partial v}{\partial Y} + 1, & \frac{\partial y}{\partial Z} = \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} = \frac{\partial w}{\partial X}, & \frac{\partial z}{\partial Y} = \frac{\partial w}{\partial Y}, & \frac{\partial z}{\partial Z} = \frac{\partial w}{\partial Z} + 1 \end{cases}$$

有限ひずみ

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} + 1 & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} + 1 & \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial w}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial Y} & \frac{\partial w}{\partial Z} + 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{Bmatrix}$$

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}d\mathbf{P}$$

$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$: ラグランジュ-グリーンのひずみテンソル

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 \right\} & E_{22} &= \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial Y} \right)^2 \right\} \\ E_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Y} \right) & E_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial Z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \\ E_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial Z} \frac{\partial w}{\partial X} \right) & E_{33} &= \frac{\partial w}{\partial Z} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial Z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial Z} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

有限ひずみ

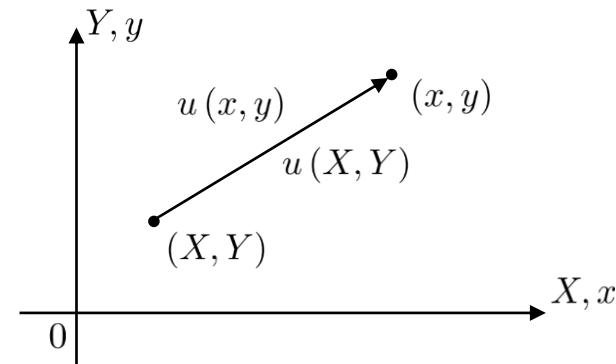
$e = \frac{1}{2} \{ I - (FF^T)^{-1} \}$: オイラー-アルマンシのひずみテンソル

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} & e_{22} &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) & e_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ e_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) & e_{33} &= \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

同様にして、オイラー-アルマンシのひずみテンソルを導いてください

変形の解析

微小領域における点の移動



物質表現

$$x(X, Y) = X + u(X, Y)$$

$$y(X, Y) = Y + v(X, Y)$$

$$dx = dX + \frac{\partial u}{\partial X} dX + \frac{\partial u}{\partial Y} dY = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial X}\right) dX + \frac{\partial u}{\partial Y} dY$$

$$dy = \frac{\partial v}{\partial X} dX + dY + \frac{\partial v}{\partial Y} dY = \frac{\partial v}{\partial X} dX + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial Y}\right) dY$$

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix}$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

空間表現

$$X(x, y) = x - u(x, y)$$

$$Y(x, y) = y - v(x, y)$$

$$dX = dx - \frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial u}{\partial y} dy = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx - \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$dY = -\frac{\partial v}{\partial x} dx + dy - \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial v}{\partial x} dx + \left(1 - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy$$

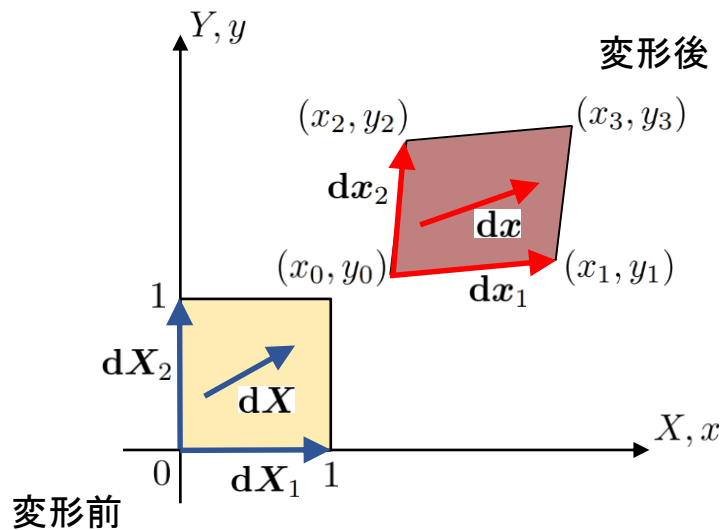
$$\begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & 1 - \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix}$$

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}$$

変位は (X, Y) あるいは (x, y) の一次関数とみなすことができる。

変形の解析

物体内部の微小領域において



$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix}$$

$$e = x_0, \quad f = y_0$$

$$a = x_1 - x_0, \quad c = y_1 - y_0$$

$$b = x_2 - x_0, \quad d = y_2 - y_0$$

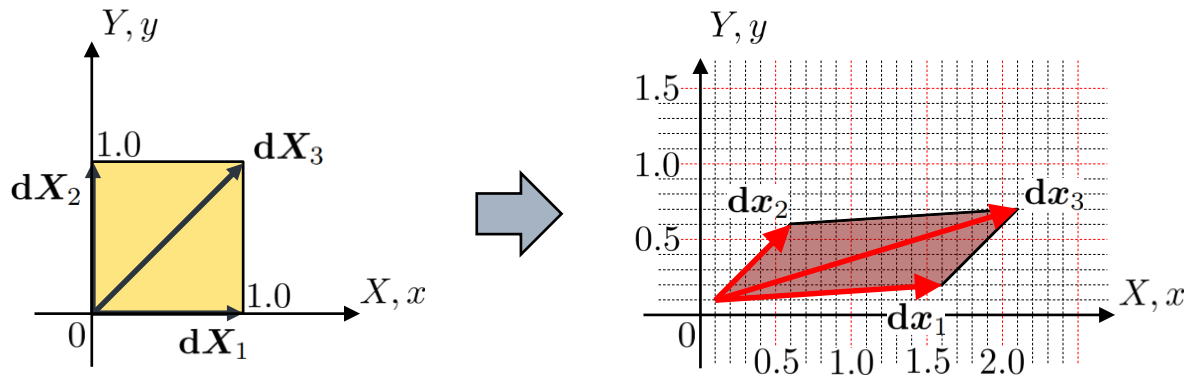
$$\begin{aligned} dx_1 &= \begin{Bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 - X_0 \\ Y_1 - Y_0 \end{Bmatrix} = F dX_1 \end{aligned}$$

$$dx = F dX$$

微小領域における変形勾配テンソル F を求める

変形の解析

右コーシー-グリーン変形テンソル C を求める



$$\begin{cases} x_0 = 0.1 \\ y_0 = 0.1 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = 1.6 \\ y_1 = 0.2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 0.6 \\ y_2 = 0.6 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = 2.1 \\ y_3 = 0.7 \end{cases}$$

$$d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = (\mathbf{F}d\mathbf{P}) \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{P}) = d\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{P} = d\mathbf{P} \cdot \mathbf{U}^2 d\mathbf{P} = d\mathbf{P} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{P}$$

C : 右コーシー-グリーン変形テンソル

U : 右ストレッチテンソル (物質ストレッチテンソル)

変形勾配テンソル

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

右コーシー-グリーン変形テンソル

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2.26 & 0.8 \\ 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}$$

変形の解析

右ストレッチテンソル U を求める手順

対角化 $\Rightarrow$ 平方根 $\Rightarrow$ 座標変換

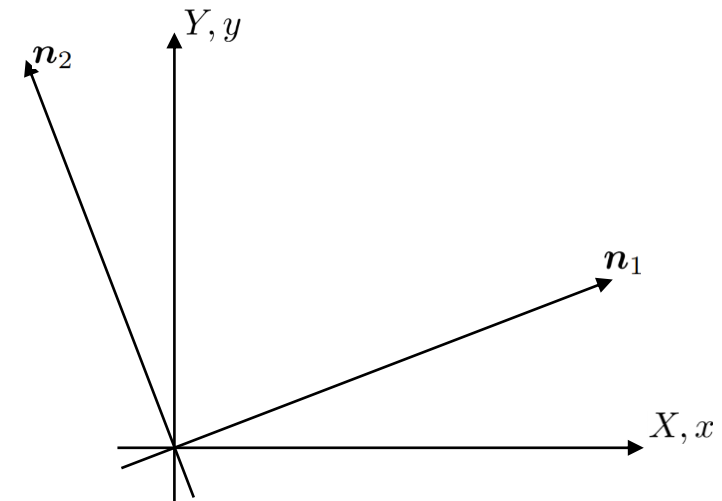
固有方程式と固有値

$$C = F^T F = \begin{bmatrix} 2.26 & 0.8 \\ 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2.26 - \lambda & 0.8 \\ 0.8 & 0.5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2.76\lambda + 0.49$$

$$\lambda_1 = 2.569, \mathbf{n}_1 = \begin{Bmatrix} 0.933 \\ 0.361 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0.1907, \mathbf{n}_2 = \begin{Bmatrix} -0.361 \\ 0.933 \end{Bmatrix}$$



変形の解析

固有ベクトル (n_1, n_2) を基底とする座標系に変換すると,

$$T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.361 \\ -0.361 & 0.933 \end{bmatrix}$$

$$C' = TCT^T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.361 \\ -0.361 & 0.933 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.26 & 0.8 \\ 0.8 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.933 & -0.361 \\ 0.361 & 0.933 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.569 & 0 \\ 0 & 0.1907 \end{bmatrix} = U'^2$$

$$U' = \begin{bmatrix} \sqrt{2.569} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.1907} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.603 & 0 \\ 0 & 0.4367 \end{bmatrix}$$

U' を XY 座標系に変換すると,

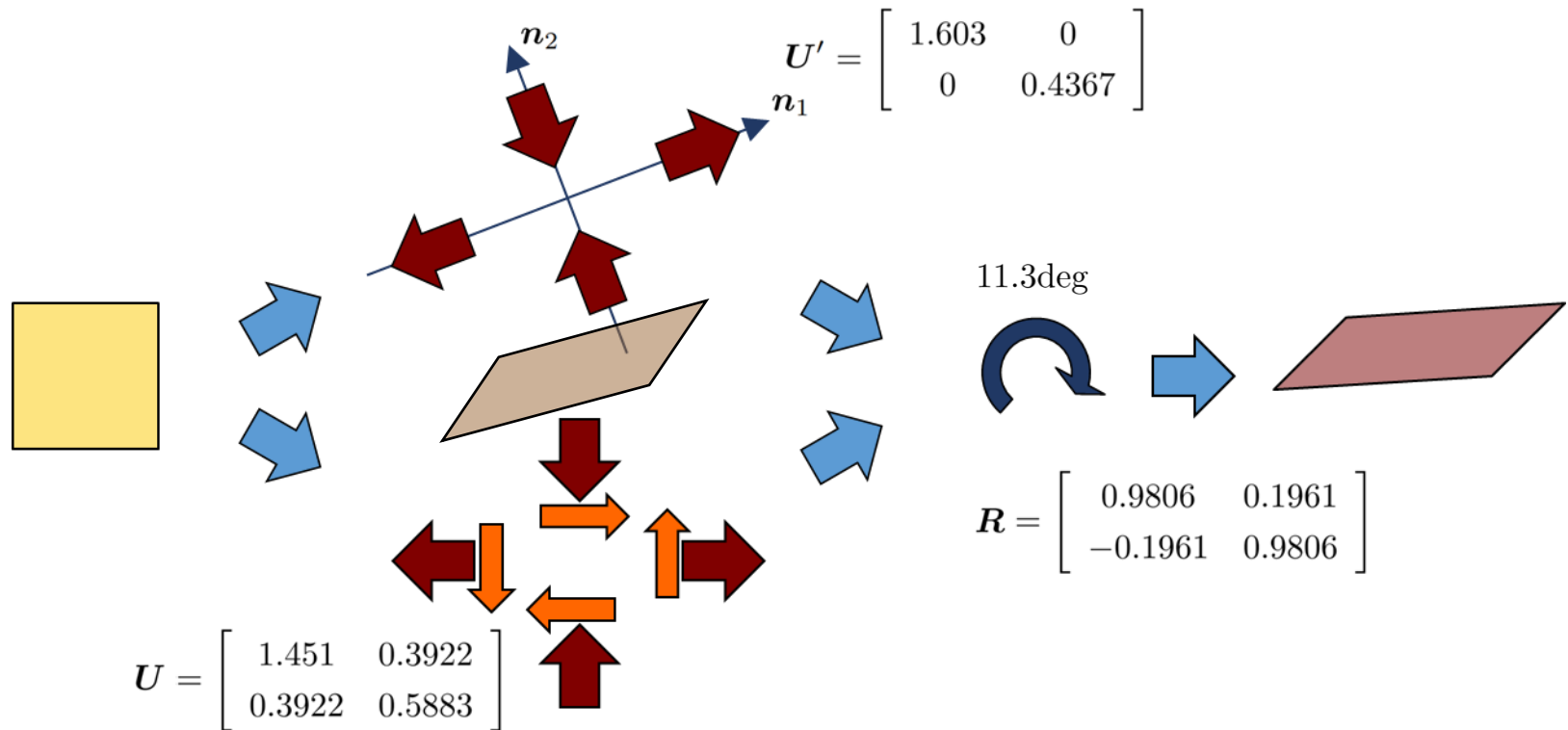
$$U = T^T U' T = \begin{bmatrix} 0.933 & -0.361 \\ 0.361 & 0.933 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.603 & 0 \\ 0 & 0.4367 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.933 & 0.361 \\ -0.361 & 0.933 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.451 & 0.3922 \\ 0.3922 & 0.5883 \end{bmatrix}$$

直交テンソル R は,

$$R = FU^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8405 & -0.5603 \\ -0.5603 & 2.073 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9806 & 0.1961 \\ -0.1961 & 0.9806 \end{bmatrix}$$

変形の解析

変形勾配テンソル F の機能



U で変形し, それを R で回転する

変形の解析

ラグランジュ-グリーンひずみテンソル

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1.5 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 2.26 & 0.8 \\ 0.8 & 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0.63 & 0.4 \\ 0.4 & -0.25 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{Bmatrix}$$

$$x = 1.5X + 0.5Y + 0.1$$

$$y = 0.1X + 0.5Y + 0.1$$

$$u = x - X = 0.5X + 0.5Y + 0.1$$

$$v = y - Y = 0.1X - 0.5Y + 0.1$$

$$\frac{\partial u}{\partial X} = 0.5, \quad \frac{\partial u}{\partial Y} = 0.5$$

$$\frac{\partial v}{\partial X} = 0.1, \quad \frac{\partial v}{\partial Y} = -0.5$$

$$E_{11} = 0.5 + \frac{1}{2} (0.5^2 + 0.1^2) = 0.63$$

$$E_{12} = \frac{1}{2} (0.5 + 0.1) + \frac{1}{2} \{0.5 \times 0.5 + 0.1 \times (-0.5)\} = 0.4$$

$$E_{22} = -0.5 + \frac{1}{2} \{0.5^2 + (-0.5)^2\} = -0.25$$

変形の解析

変形前のベクトル dX_1, dX_2, dX_3 が変形勾配テンソル F によって変形を受ける。
 dx_1, dx_2, dx_3 を計算しなさい。

変形勾配テンソル F を左極分解して, 左ストレッチテンソル V と
オイラー-アルマンシのひずみテンソル e を求めなさい。

材料力学を学ぶ難しさ

- 現状の材料力学の教科書の良いところは何ですか？
- 現状の材料力学の教科書の問題点は何ですか？

みなさんのご意見, 考えをお聞かせください

いただいた意見を次の版に反映させていきたいと思ひます

変形理論に関する問題

1. 次の記述のうち正しいものを選びなさい

- a. 微小変形理論では、変形後の形状について力のつり合いを考える
- b. 有限変形理論は、変形が微小という前提で構築されている
- c. 有限変形理論では、線形弾性材料であってもつり合い方程式は非線形になる
- d. 応力ひずみ関係に線形性が成立しない問題は、つねに幾何学的非線形問題とよばれる

2. 有限変形のつり合い方程式が変位に関して非線形になる直接的な原因として不適切なものはどれか。

- a. 変形による断面の変化
- b. 構造物の代表寸法に対する変位の大きさ
- c. 変位に対して非線形な量として定義されるひずみ
- d. 変位における剛体回転成分

変形理論に関する問題

3. F の呼称として正しいものを選びなさい

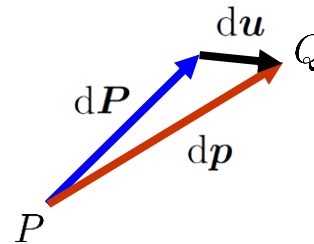
- a. 応力テンソル
- b. 変形勾配テンソル
- c. ひずみテンソル
- d. 回転テンソル

$$d\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} \quad (7.71)$$

$$= \mathbf{H}d\mathbf{P} + d\mathbf{P} = (\mathbf{H} + \mathbf{I})d\mathbf{P}$$

$$= \mathbf{F}d\mathbf{P}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{I} \quad (7.72)$$



変形理論に関する問題

4. 変形勾配テンソルを F とすると, グリーン・ラグランジュひずみテンソル E の正しい表記はどれか。 I は単位テンソル

a. $E = \frac{1}{2} (F^T F - I)$

b. $E = \frac{1}{2} F^T F$

c. $E = \frac{1}{2} (F^T F + I)$

d. $E = \frac{1}{2} (F F^T - I)$

5. 変形勾配テンソルを F とすると, アルマンジひずみテンソル A の正しい表記はどれか。 I は単位テンソル

a. $e = \frac{1}{2} (I + F^T F)$

b. $e = \frac{1}{2} (I - F^T F)$

c. $e = \frac{1}{2} (I - F F^T)$

d. $e = \frac{1}{2} \{ I - (F F^T)^{-1} \}$

以上