

3. はり理論

3.1 はりの変位関数

3.2 はりの基礎方程式

3.3 サンプナンのねじり

3.4 参考文献

4. 有限要素法プログラムの作成

4.6 ゆがみ関数

2021年6月19日
AN技術士事務所
中本 昭

第3章 はり理論

その断面の寸法に比べて長さをはるかに大きい構造部材をはりあるいは柱とよぶ。このような細長い構造部材の変形をよく観察すると、はり全体の曲がり変形に比べて断面の変形は極めて小さい。Bernoulli-Eulerはこのような変形に対して「平面保持 (planes remain plane)」の仮定を提唱した。一方、V.Z.Vlasovは「断面不変」を主張している。

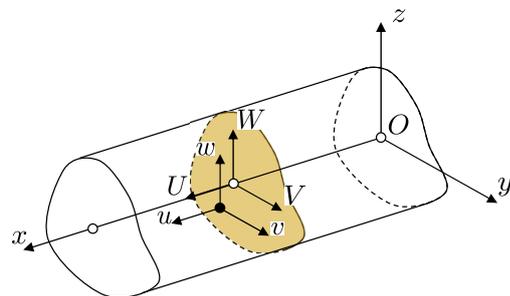
このような仮定は次の2通りに解釈できる。

- (i) 断面がひずまない (断面剛の仮定)
- (ii) 断面内の応力成分が無視できる (断面内無応力の仮定)

これらの仮定¹に従うと、はりの変形がどのように表現されるかを考えてみよう。

3.1 はりの変位関数

断面一様で図心軸が直線を保つはりの端面に次図のように座標系 $Oxyz$ を設定する。



はりの内部の任意の点の変位を u, v, w 、断面の図心の変位を U, V, W とする。

$$\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases} \quad \begin{cases} U = U(x) \\ V = V(x) \\ W = W(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

(i) の仮定に従うと、断面内のひずみはゼロだから、

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \quad (3.2)$$

さらに、曲げ荷重によるせん断ひずみ $\gamma_{xy}^{(b)}, \gamma_{zx}^{(b)}$ もゼロである。

$$\gamma_{xy}^{(b)} = \gamma_{zx}^{(b)} = 0 \quad (3.3)$$

¹横浜国大 山田貴博先生は「仮定」を”assumption”ではなく”ansatz”(ドイツ語)とよぶことを推奨されている。Wikipediaによると”ansatz”とは”In physics and mathematics, an ansatz is an educated guess or an additional assumption made to help solve a problem, and which may later be verified to be part of the solution by its results.”とされている

このとき、はりの変位は (3.2) 式より

$$\begin{cases} \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & \therefore v = v(x, z) \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & \therefore w = w(x, y) \end{cases} \quad (3.4)$$

となる。また、

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (3.5)$$

と (3.4) 式より、

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\Theta(x), \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \Theta(x) \quad (3.6)$$

と置くことができ、積分すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} v(x, y, z) &= V(x) - z\Theta(x) \\ w(x, y, z) &= W(x) + y\Theta(x) \end{aligned} \quad (3.7)$$

この結果より、「断面剛」の仮定から得られる断面内の変位は図心の平行移動 $V(x)$, $W(x)$ と図心軸回りの回転 $\Theta(x)$ からなる剛体変位であることがわかる。

次に、はりの軸方向の変位 $u(x, y, z)$ を調べてみよう。

変位 $u(x, y, z)$ は、曲げ変形による変位 $u^{(b)}(x, y, z)$ とねじりによる変位 $u^{(t)}(x, y, z)$ の和で与えられると仮定する。

ねじりによる変位は、**Saint-Venant** のねじり理論に基づいて考察する。

$$u(x, y, z) = u^{(b)}(x, y, z) + u^{(t)}(x, y, z) \quad (3.8)$$

せん断ひずみ γ_{xy} , γ_{zx} は、

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.9)$$

だから、(3.7),(3.8) より、

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^{(b)} + \gamma_{xy}^{(t)} = \frac{\partial u^{(b)}}{\partial y} + \frac{\partial u^{(t)}}{\partial y} + V'(x) - z\Theta'(x) \\ \gamma_{xy}^{(b)} &= \frac{\partial u^{(b)}}{\partial y} + V'(x) \\ \gamma_{xy}^{(t)} &= \frac{\partial u^{(t)}}{\partial y} - z\Theta'(x) \end{aligned} \quad (3.10)$$

と曲げ変形によるせん断ひずみ $\gamma_{xy}^{(b)}$ とねじりによる変位 $\gamma_{xy}^{(t)}$ の和として表現できる。なお、' は x に関する微分を意味する。

また、曲げ変形によってはせん断ひずみが発生しないと仮定しているので、

$$\gamma_{xy}^{(b)} = \frac{\partial u^{(b)}}{\partial y} + V'(x) = 0 \quad (3.11)$$

同様にして次式を得る。

$$\begin{aligned} \gamma_{zx} &= \gamma_{zx}^{(b)} + \gamma_{zx}^{(t)} = \frac{\partial u^{(b)}}{\partial z} + \frac{\partial u^{(t)}}{\partial z} + W'(x) + z\Theta'(x) \\ \gamma_{zx}^{(b)} &= \frac{\partial u^{(b)}}{\partial z} + W'(x) = 0 \\ \gamma_{zx}^{(t)} &= \frac{\partial u^{(t)}}{\partial z} + y\Theta'(x) \end{aligned} \quad (3.12)$$

(3.11) 式, (3.12) 式第 2 式より, 曲げ変形による軸方向の変位 $u^{(b)}(x, y, z)$ は

$$u^{(b)}(x, y, z) = U(x) - yV'(x) - zW'(x) \quad (3.13)$$

となる。

ねじり変形による軸方向の変位 $u^{(t)}(x, y, z)$ からは軸方向応力 σ_x が生じないとすれば, x 方向の応力のつり合い式より,

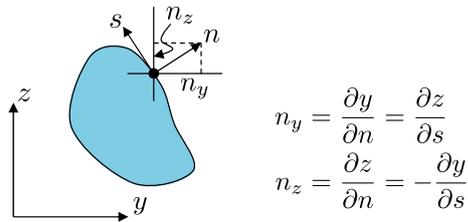
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (3.14)$$

となる。なお, x 方向の体積力はないものとする。

(3.10),(3.12) 式の第 3 式を (3.14) 式に代入して $u^{(t)}$ に関する調和方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 u^{(t)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u^{(t)}}{\partial z^2} = 0 \quad (3.15)$$

はりの断面が下図のような形 (単一連結領域) とすると, はりの表面には外力が作用していないから, 無応力の条件よりせん断応力成分は,



$$\begin{aligned} n_y &= \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial s} \\ n_z &= \frac{\partial z}{\partial n} = -\frac{\partial y}{\partial s} \end{aligned}$$

$$\tau_{xy}n_y + \tau_{zx}n_z = 0 \quad (3.16)$$

を満たさなければならない。"n" ははりの断面の境界上に立てた外向き法線方向を示す。

(3.10),(3.12) 式の第 3 式を (3.16) 式に代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} G\gamma_{xy}^{(t)}n_y + G\gamma_{zx}^{(t)}n_z &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial u^{(t)}}{\partial y} - z\Theta'(x) \right\} n_y + \left\{ \frac{\partial u^{(t)}}{\partial z} + y\Theta'(x) \right\} n_z &= 0 \\ \frac{\partial u^{(t)}}{\partial y}n_y + \frac{\partial u^{(t)}}{\partial z}n_z &= \Theta'(x)(zn_y - yn_z) \\ \frac{\partial u^{(t)}}{\partial n} &= \Theta'(x)(zn_y - yn_z) \end{aligned} \quad (3.17)$$

また, ねじりによる x 軸方向の応力 $\sigma^{(t)} = 0$ と仮定しているから,

$$\frac{\partial u^{(t)}}{\partial x} = 0 \quad (3.18)$$

でなければならない。(3.17) 式を参考にして,

$$u^{(t)}(x, y, z) = \Theta'(x)\omega(y, z) \quad (3.19)$$

と仮定すると, (3.18) 式より,

$$\Theta'(x) = \Theta' = \text{Constant} \quad (3.20)$$

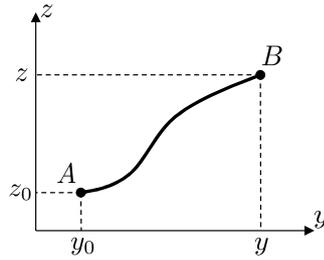
であるから, (3.15) 式と (3.17) 式より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial n} &= \Theta'(x)(zn_y - yn_z) : \text{境界条件} \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる。

ここで, 新たな関数 $\phi(y, z)$ を導入する。

$$\phi(y, z) = \int_{A(y_0, z_0)}^{B(y, z)} (-\tau_{zx} dy + \tau_{xy} dz) \quad (3.22)$$



(3.14) 式より, 上式は完全微分式だから次式が成立する。

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -G\Theta' \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial \phi}{\partial z} = G\Theta' \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

上式第1式を y で, 第2式を z でそれぞれ微分して第1式から第2式を引くと次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2G\Theta' \quad (3.24)$$

境界条件 (3.16) は次式となる。

$$-\frac{\partial \phi}{\partial z} n_y + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_z = 0 \quad (3.25)$$

断面の外向き法線の方向余弦 (n_x, n_y) は, 接線 s の方向余弦 (s_x, s_y) と次式の関係があるから,

$$s_y = \frac{\partial y}{\partial s} = -n_z, \quad s_z = \frac{\partial z}{\partial s} = n_y \quad (3.26)$$

境界条件 (3.25) は次式となる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} s_z - \frac{\partial \phi}{\partial y} s_y = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0 \quad \therefore \phi = \text{Constant} \quad (3.27)$$

中実断面の場合は,

$$\phi = 0 \quad (3.28)$$

とする。

ここで, $\omega(y, z)$ は Saint-Venant のゆがみ関数 (warping function), $\phi(y, z)$ はねじりの応力関数 (stress function) である。

Saint-Venant は, $\Theta'(x) = \text{Constant}$ (Saint-Venant のねじりあるいは一様ねじり) の場合に (3.19) 式の仮定を置いたが, それ以外のはりの曲げねじりにおいても同様に成立するものとする。

これまでの結果を総合すると、はりの軸方向の変位関数 $u(x, y, z)$ は次式となる。

$$u(x, y, z) = U(x) - yV'(x) - zW'(x) + \Theta'(x)\omega(y, z) \quad (3.29)$$

第1項は、はりの軸方向の一様伸縮、第2, 3項は、Euler-Bernoulliの仮定に基づくはりの曲げ変形、第4項は、Saint-Venantのねじり理論を拡張した曲げねじり変形の基礎式を与える。

(ii) 断面内無応力の仮定から出発して得られる変位関数に興味のある方は、参考文献[1]を参照してほしい。

3.2 はりの基礎方程式

Euler-Bernoulliの断面剛の仮定から次式の変位関数が導かれた。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= U(x) - yV'(x) - zW'(x) + \Theta'(x)\omega(y, z) \\ v(x, y, z) &= V(x) - z\Theta(x) \\ w(x, y, z) &= W(x) + y\Theta(x) \end{aligned} \quad (3.30)$$

次に、仮想仕事の原理よりこれらの変位関数の支配方程式を導いてみよう。はりのひずみ成分は次式となる。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = U'(x) - yV''(x) - zW''(x) + \Theta''(x)\omega(y, z) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \Theta'(x) \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right) \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \Theta'(x) \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right) \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

はりの材料が等方弾性体とすると、3次元弾性論より応力成分は次式となる。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E'\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \\ \sigma_y &= \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \\ E' &= \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}E \end{aligned} \quad (3.32)$$

はりのひずみエネルギー V_{in} は次式となる。

$$V_i = \frac{1}{2} \iiint (E'\varepsilon_x^2 + G\gamma_{xy}^2 + G\gamma_{zx}^2) dx dy dz \quad (3.33)$$

ところで、「断面剛」の仮定はポアソン比 ν の効果を見逃していることになるので、以降は E' の代わりに E を用いることにする。

(3.33) 式に (3.31) 式を代入して積分を実行して次式を得る。

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{1}{2} \iiint E(U' - yV'' - zW'' + \Theta''\omega)^2 dx dy dz \\ &\quad + \frac{1}{2} \iiint G\Theta'^2 \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right)^2 \right\} dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l (EAU'^2 + EI_zV''^2 + EI_yW''^2 + EI_\omega\Theta''^2 \\ &\quad - 2ES_zU'V'' - 2ES_yU'W'' + 2ES_\omega U'\Theta'' \\ &\quad + 2EI_{yz}V''W'' - 2EI_{\omega z}V''\Theta'' - 2EI_{\omega y}W''\Theta'') dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^l GK\Theta'^2 dx \end{aligned} \quad (3.34)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
A &= \iint dydz, \quad S_z = \iint ydydz, \quad S_y = \iint zdydz, \quad S_\omega = \iint \omega dydz \\
I_z &= \iint y^2 dydz, \quad I_y = \iint z^2 dydz, \quad I_\omega = \iint \omega^2 dydz \\
I_{yz} &= \iint yz dydz, \quad I_{\omega y} = \iint z\omega dydz, \quad I_{\omega z} = \iint y\omega dydz \\
K &= \iint \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right)^2 \right\} dydz
\end{aligned} \tag{3.35}$$

であり, はりの変形を支配する断面定数の定義式である。\$A\$ は断面積, \$S_y, S_z, S_\omega\$ は断面 1 次モーメント, \$I_y, I_z, I_\omega\$ は断面 2 次モーメントを表わし, \$K\$ は Saint-Venant のねじり定数である。また, \$EI_\omega\$ は曲げねじり剛性 (warping torsional rigidity) と呼ばれている。

(3.34) 式から変位 \$U, V, W, \Theta\$ に関する変分を取り, 内部仮想仕事 \$\delta V_{in}\$ を計算しておこう。

まず, 第 1 項と第 2 項について計算してみると,

$$\begin{aligned}
\delta V_{in}^{(1)} &= \delta \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l EA \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 dx \right\} = \int_0^l EA \frac{dU}{dx} \frac{d\delta U}{dx} dx = \int_0^l EAU' \delta U' dx \\
&= [EAU' \delta U]_0^l - \int_0^l EAU'' \delta U dx \\
\delta V_{in}^{(2)} &= \delta \left(\frac{1}{2} \int_0^l EI_z V''^2 dx \right) = \int_0^l EI_z \frac{d^2 V}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 V}{dx^2} \right) dx = \int_0^l EI_z \frac{d^2 V}{dx^2} \frac{d^2 \delta V}{dx^2} dx \\
&= \int_0^l EI_z V'' \delta V'' dx = [EI_z V'' \delta V']_0^l - \int_0^l EI_z V''' \delta V' dx \\
&= [EI_z V'' \delta V']_0^l - [EI_z V''' \delta V]_0^l + \int_0^l EI_z V'''' \delta V dx
\end{aligned} \tag{3.36}$$

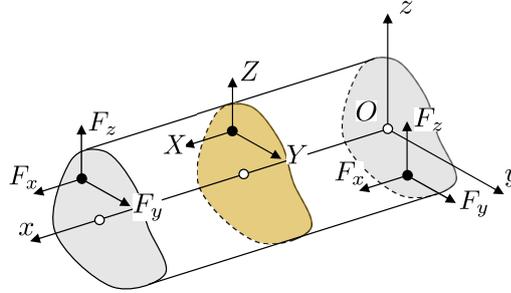
となる。途中, 変分と微分の順序の入れ替えと部分積分を利用した。

以下, 同様にして次式を得る。

$$\begin{aligned}
\delta V_{in} &= [EAU' \delta U + EI_z V'' \delta V' - EI_z V''' \delta V + EI_y W'' \delta W' - EI_y W''' \delta W + EI_\omega \Theta'' \delta \Theta' - EI_\omega \Theta''' \delta \Theta]_0^l \\
&\quad - \int_0^l EAU'' \delta U dx + \int_0^l EI_z V'''' \delta V dx + \int_0^l EI_y W'''' \delta W dx + \int_0^l EI_\omega \Theta'''' \delta \Theta dx \\
&\quad - ES_z [V'' \delta U + U' \delta V' - U'' \delta V]_0^l + ES_z \int_0^l (V''' \delta U - U''' \delta V) dx \\
&\quad - ES_y [W'' \delta U + U' \delta W' - U'' \delta W]_0^l + ES_y \int_0^l (W''' \delta U - U''' \delta W) dx \\
&\quad + ES_\omega [\Theta'' \delta U + U' \delta \Theta' - U'' \delta \Theta]_0^l - ES_\omega \int_0^l (\Theta''' \delta U - U''' \delta \Theta) dx \\
&\quad + EI_{yz} [W'' \delta V' + V'' \delta W' - W''' \delta V - V''' \delta W]_0^l + EI_{yz} \int_0^l (W'''' \delta V + V'''' \delta W) dx \\
&\quad - EI_{\omega z} [\Theta'' \delta V' + V'' \delta \Theta' - \Theta''' \delta V - V''' \delta \Theta]_0^l - EI_{\omega z} \int_0^l (\Theta'''' \delta V + V'''' \delta \Theta) dx \\
&\quad - EI_{\omega y} [W'' \delta \Theta' + \Theta'' \delta W' - W''' \delta \Theta - \Theta''' \delta W]_0^l - EI_{\omega y} \int_0^l (W'''' \delta \Theta + \Theta'''' \delta W) dx \\
&\quad + [GK\Theta' \delta \Theta]_0^l - \int_0^l GK\Theta'' \delta \Theta dx
\end{aligned} \tag{3.37}$$

次に、はりに作用する外力による外部仮想仕事 δW_e を求めてみよう。外力としては、物体力 X, Y, Z と端面 ($x=0, l$) に作用する表面力 (F_x, F_y, F_z) を考える。

$$\begin{aligned} \delta W_{ex} = & \iiint (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dx dy dz \\ & - \iint_{x=0} (F_x\delta u + F_y\delta v + F_z\delta w) dy dz + \iint_{x=l} (F_x\delta u + F_y\delta v + F_z\delta w) dy dz \end{aligned} \quad (3.38)$$



(3.37) 式に (3.30) 式を代入して積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \delta W_{ex} = & \int_0^l (p\delta U + q_y\delta V + q_z\delta W + m_x\delta\Theta + m_z\delta V' - m_y\delta W' + m_\omega\delta\Theta') dx \\ & + [\bar{P}\delta U + \bar{V}_y\delta V + \bar{V}_z\delta W + \bar{M}_x\delta\Theta - \bar{M}_y\delta W' + \bar{M}_z\delta V' + \bar{M}_\omega\delta\Theta']_{x=0}^{x=l} \\ = & \int_0^l \{p\delta U + (q_y - m'_z)\delta V + (q_z + m'_y)\delta W + (m_x - m'_\omega)\delta\Theta\} dx \\ & + [\bar{P}\delta U + (\bar{V}_y + m_z)\delta V + (\bar{V}_z - m_y)\delta W + (\bar{M}_x + m_\omega)\delta\Theta \\ & - \bar{M}_y\delta W' + \bar{M}_z\delta V' + \bar{M}_\omega\delta\Theta']_{x=0}^{x=l} \end{aligned} \quad (3.39)$$

ここで、

$$\begin{aligned} p(x) &= \iiint X dy dz, \quad q_y(x) = \iiint Y dy dz, \quad q_z(x) = \iiint Z dy dz \\ m_x(x) &= \iiint (yZ - zY) dy dz, \quad m_y(x) = -\iiint yX dy dz, \quad m_z(x) = \iiint zX dy dz \\ m_\omega &= \iiint \omega X dy dz \\ \bar{P} &= \iint F_x dy dz \\ \bar{M}_x &= \iint (yF_z - zF_y) dy dz, \quad \bar{M}_y = \iint zF_y dy dz, \quad \bar{M}_z = -\iint yF_x dy dz \\ \bar{M}_\omega &= \iint \omega F_x dy dz \end{aligned} \quad (3.40)$$

である。

(3.37) 式と (3.39) 式を仮想仕事の原理の式に代入すると、

$$\delta V_{in} - \delta W_{ex} = 0 \quad (\delta U, \delta V, \delta W, \delta\Theta) \quad (3.41)$$

上式は、 $\delta U, \delta V, \delta W, \delta\Theta$ について成立するから次の4つの方程式と境界条件が得られる。

(i) 仮想変位 δU に関して

$$EAU'' - ES_zV''' - ES_yW''' + ES_\omega\Theta''' + p = 0 \quad (3.42)$$

$z = 0, l$ で,

$$(EAU' - ES_z V'' - ES_y W'' + ES_\omega \Theta'' - \bar{P}) \delta U = 0 \quad (3.43)$$

(ii) 仮想変位 δV に関して

$$EI_z V'''' - ES_z U''' + EI_{yz} W'''' - EI_{\omega z} \Theta'''' - q_y + m_z = 0 \quad (3.44)$$

$z = 0, l$ で,

$$\begin{aligned} (EI_z V'' - ES_z U' + EI_{yz} W'' - EI_{\omega z} \Theta'' - \bar{M}_z) \delta V' &= 0 \\ (-EI_z V'''' + ES_z U''' - EI_{yz} W'''' + EI_{\omega z} \Theta'''' - (\bar{V}_y + m'_z)) \delta V &= 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

(iii) 仮想変位 δW に関して

$$EI_y W'''' - ES_y U''' - EI_{yz} V'''' - EI_{\omega y} \Theta'''' - (q_z + m_y) = 0 \quad (3.46)$$

$z = 0, l$ で,

$$\begin{aligned} (EI_y W'' - ES_y U' + EI_{yz} V'' - EI_{\omega y} \Theta'' + \bar{M}_y) \delta W' &= 0 \\ (-EI_y W'''' + ES_y U''' - EI_{yz} V'''' + EI_{\omega y} \Theta'''' - (\bar{V}_z - m'_y)) \delta W &= 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

(iv) 仮想変位 $\delta \Theta$ に関して

$$EI_\omega \Theta'''' + ES_\omega U''' - EI_{\omega z} V'''' - EI_{\omega y} W'''' - GK\Theta'' - m_x + m'_\omega = 0 \quad (3.48)$$

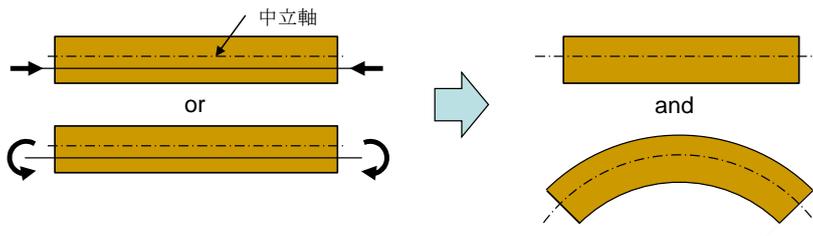
$z = 0, l$ で,

$$\begin{aligned} (EI_\omega \Theta'' + ES_\omega U' - EI_{\omega z} V'' - EI_{\omega y} W'' - \bar{M}_\omega) \delta \Theta' &= 0 \\ (-EI_\omega \Theta'''' - ES_\omega U''' + EI_{\omega z} V'''' + EI_{\omega y} W'''' + GK\Theta'' - (\bar{M}_x + m_\omega)) \delta \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

座標原点を任意にとったので、これらの式は U, V, W, Θ が連成した複雑な式になっている。はりの断面の図心を座標原点に選ぶと、断面1次モーメント S_x, S_y はゼロだから次式となる。

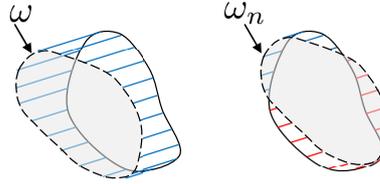
$$\begin{aligned} EAU'' + ES_\omega \Theta'' + p &= 0 \\ EI_z V'''' + EI_{yz} W'''' - EI_{\omega z} \Theta'''' - q_y + m_z &= 0 \\ EI_y W'''' - EI_{yz} V'''' - EI_{\omega y} \Theta'''' - (q_z + m_y) &= 0 \\ EI_\omega \Theta'''' + ES_\omega U''' - EI_{\omega z} V'''' - EI_{\omega y} W'''' - GK\Theta'' - m_x + m'_\omega &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

軸方向の伸縮変形 U と曲げ変形 V, W の連成が解消する。断面の図心は曲げの中立軸だから、軸力による曲げ変形と曲げモーメントによる軸方向の変形がなくなる。



(3.50) 式で, $S_\omega = \iint \omega dydz = 0$ であれば, 軸方向の変形 U とねじりによる断面のゆがみは連成しない。Saint-Venant のゆがみ関数 $\omega(y, z)$ が次式で規準化 (normalize) されていることがその条件である。

$$\begin{aligned} \omega_n(y, z) &= \omega(y, z) - \frac{S_\omega}{A} \\ \therefore S_{\omega_n} &= \iint \omega_n dydz = \iint \left(\omega - \frac{S_\omega}{A} \right) dydz = S_\omega - \left(\frac{S_\omega}{A} \right) A = 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$



このように, ゆがみ関数が規準化されているときの方程式は²,

$$\begin{aligned} EAU'' + p &= 0 \\ EI_z V'''' + EI_{yz} W'''' - EI_{\omega z} \Theta'''' - q_y + m_z &= 0 \\ EI_y W'''' - EI_{yz} V'''' - EI_{\omega y} \Theta'''' - (q_z + m_y) &= 0 \\ EI_\omega \Theta'''' - EI_{\omega z} V'''' - EI_{\omega y} W'''' - GK\Theta'' - m_x + m'_\omega &= 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

さらに, 座標軸の方向が慣性主軸と一致していれば $I_{yz} = 0$ だから,

$$\begin{aligned} EAU'' + p &= 0 \\ EI_z V'''' - EI_{\omega z} \Theta'''' - q_y + m_z &= 0 \\ EI_y W'''' - EI_{\omega y} \Theta'''' - (q_z + m_y) &= 0 \\ EI_\omega \Theta'''' - EI_{\omega z} V'''' - EI_{\omega y} W'''' - GK\Theta'' - m_x + m'_\omega &= 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

となって, 方程式はかなり簡単化されたが, 依然として曲げ変形 V, W とねじり変形 Θ は連成している。

そこで, 曲げ変形 V, W を断面内のある点 $S(y_S, z_S)$ の平行変位 V_S, W_S と回転 θ で表わしてみる。

$$\begin{cases} V_S = V - z_S \theta \\ W_S = W + y_S \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = V_S + z_S \theta \\ W = W_S - y_S \theta \end{cases} \quad (3.54)$$

この式を (3.53) 式へ代入すると次式となる。

$$\begin{aligned} EAU'' + p &= 0 \\ EI_z V_S'''' + E(z_S I_z - I_{\omega z}) \Theta'''' - q_y + m_z &= 0 \\ EI_y W_S'''' - E(y_S I_y + I_{\omega y}) \Theta'''' - (q_z + m_y) &= 0 \\ E(I_\omega - z_S I_{\omega z} + y_S I_{\omega y}) \Theta'''' - GK\Theta'' - EI_{\omega y} V_S'''' - EI_{\omega z} W_S'''' - m_x + m'_\omega &= 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

今, y_S, z_S を次式のように選ぶとすると,

$$y_S = -\frac{I_{\omega y}}{I_y}, \quad z_S = -\frac{I_{\omega z}}{I_z} \quad (3.56)$$

(3.55) 式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} EAU'' + p &= 0 \\ EI_z V_S'''' - q_y + m_z &= 0 \\ EI_y W_S'''' - (q_z + m_y) &= 0 \\ EI_\omega^{(S)} \Theta'''' - GK\Theta'' - m_x^{(S)} + m_\omega'^{(S)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

² $X(x, y, z)$ の合力は図心を通るものと仮定する。すなわち, $\iint \omega_n X dydz = \iint \omega X dydz = m_\omega$

ここで,

$$\begin{aligned} I_{\omega}^{(S)} &= I_{\omega} - y_S^2 I_y - z_S^2 I_z \\ m_x^{(S)} &= m_x + q_y z_S - q_z y_S \\ m_{\omega}^{(S)} &= m_{\omega}' + m_z' z_S + m_y' y_S \end{aligned} \quad (3.58)$$

すなわち, (3.56) 式で定義される点の平行変位 V_S, W_S と回転 θ を変位関数として選べば, 曲げ変形とねじり変形は完全に分離できる。

このような点をはりの断面のせん断中心 (shear center) とよび, $I_{\omega}^{(S)}$ はせん断中心回りの曲げねじり剛性を示し, $m_x^{(S)}$ はせん断中心軸に沿って分布するねじりモーメントを表わす。

3.3 サンプナンのねじり

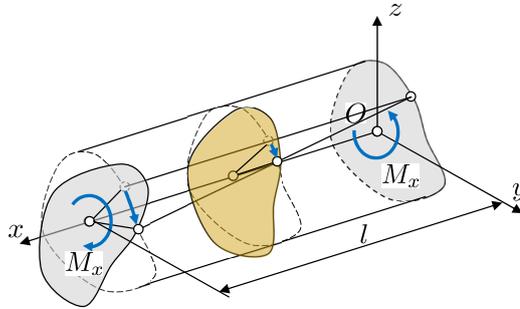
真直ぐで一様断面棒のねじり問題はサンプナンによって初めて解析されたので「サンプナンのねじり」とよばれている。この問題を解くための仮定は次の3つである。

- 任意の断面の基準位置に対するねじれ角 $\phi - \phi_0$ は, 基準位置からの距離 $x - x_0$ に比例する

$$\begin{aligned} \phi - \phi_0 &= \alpha (x - x_0) \\ \alpha &= \Theta' \end{aligned} \quad (3.59)$$

- 断面は位置 x にかかわらず同じ形に変形する
- 負荷されるねじりトルクは静的に等価であれば, 一定距離離れた位置における効果は同等とみなせる (サンプナンの原理)

真直ぐで一様断面棒の両端をねじると, どの位置の断面を見ても全く同じ変形, 応力の状態である。



今は, ねじりトルクしか作用しないので変位関数は, (3.30) 式より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha \omega(y, z) \\ v(x, y, z) &= -z\Theta(x) = -\alpha xz \\ w(x, y, z) &= y\Theta(x) = \alpha xy \end{aligned} \quad (3.60)$$

となる。これを (3.31) 式に代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \alpha z \right) = G\alpha \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right) \\ \tau_{zx} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \alpha y \right) = G\alpha \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right) \\ \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

はりの両端面に作用するねじりモーメント (トルク) を M_x とすると, 両端面の相対回転角は αl (l : はりの長さ) だから, 仮想仕事式は次式で与えられる。

$$\delta V_{in} - \delta W_{ex} = 0$$

$$\delta \left[\iiint \frac{1}{2} G \alpha^2 \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right)^2 \right\} dx dy dz \right] - M_x l \delta \alpha = 0 \quad (3.62)$$

変分は α と ω について取られるので,

$$\int_0^l G \alpha^2 dx \iint \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right) \delta \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right) \delta \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \right\} dy dz$$

$$+ \int_0^l G \alpha dx \iint \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right)^2 \right\} dy dz$$

$$- M_x l \delta \alpha = 0 \quad (3.63)$$

$$= \int_0^l G \alpha^2 dx \iint \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right) \delta \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right) \delta \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \right\} dy dz$$

$$+ l (G K \alpha - M_x) \delta \alpha = 0$$

ここで, 次式の関係を利用した。

$$K = \iint \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right)^2 \right\} dy dz = \iint \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right) y - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right) z \right\} dy dz$$

$$\therefore \iint \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right\} dy dz = \iint \left(z \frac{\partial \omega}{\partial y} - y \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dy dz \quad (3.64)$$

$\delta \alpha$ は任意だから, (3.63) 式より次式が得られる。

$$M_x = G K \alpha \quad (3.65)$$

K は **Saint-Venant** のねじり定数である。

$\delta \omega$ も任意だから, 次式が得られる。

$$\int G \alpha^2 l \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial n} + y n_z - z n_y \right\} \delta \omega ds - \iint G \alpha^2 l \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) \delta \omega dy dz = 0 \quad (3.66)$$

(3.66) 式からは, ω に関する微分方程式と境界条件が得られる。

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = z n_y - y n_z \quad (3.67)$$

ここまでのことを別の方法で確かめてみよう。

まず, (3.61) 式を x 方向の応力のつり合い式に代入して,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0 \quad (3.68)$$

(3.67) 式と同じ式が得られる。 $\omega(y, z)$ は調和関数である。

棒の表面には外力が作用していないので, 表面の外向き単位法線ベクトルを (n_x, n_y, n_z) とすると (長さ

方向に断面が一様であることを仮定しているので $n_x = 0$),

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}n_y + \tau_{zx}n_z &= 0 \\ \frac{n_z}{n_y} &= -\frac{\tau_{xy}}{\tau_{zx}} \end{aligned} \quad (3.70)$$

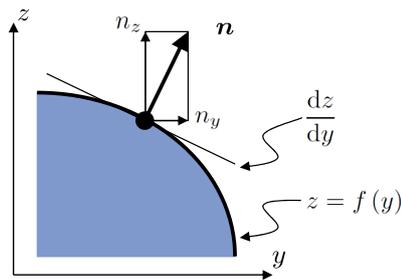
断面外周の曲線の方程式を $z = f(y)$ とすると、接線の傾きは dz/dy で法線ベクトルと直交するから、

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{\frac{n_z}{n_y}} \quad (3.71)$$

より、

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\tau_{zx}}{\tau_{xy}} = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial z} + y}{\frac{\partial \omega}{\partial y} - z} \quad (3.72)$$

が外周における境界条件である。

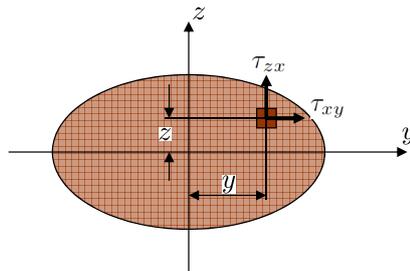


すなわち、(3.70),(3.72) 式より、

$$\frac{n_z}{n_y} = -\frac{\frac{\partial \omega}{\partial y} - z}{\frac{\partial \omega}{\partial z} + y} \quad \therefore \frac{\partial \omega}{\partial y}n_y + \frac{\partial \omega}{\partial z}n_z = zn_y - yn_z \Rightarrow \frac{\partial \omega}{\partial n} = zn_y - yn_z \quad (3.73)$$

ねじりモーメント M_x はせん断応力 τ_{xy}, τ_{yz} によるトルクの総計に等しいから次式で与えられる。

$$M_x = \int_A (\tau_{zx}y - \tau_{xy}z) dA = \int_A G\alpha \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right) y - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right) z \right\} dA = GK\alpha \quad (3.74)$$



$\phi(y, z)$ を用いて (3.74) 式を書き換えると,

$$\begin{aligned} M_x &= - \iint_A \left(y \frac{\partial \phi}{\partial y} + z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dy dz = - \int_A \left(y \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \right) dz - \int_A \left(z \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right) dy \\ &= - \int_A \left([y\phi]_{y_1}^{y_2} dy - \int \phi dy \right) dz - \int_A \left([z\phi]_{z_1}^{z_2} dz - \int \phi dz \right) dy \\ &= 2 \iint_A \phi dy dz \end{aligned} \quad (3.75)$$

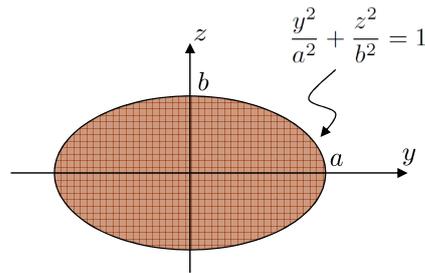
となる。

軸方向の変位 $u(y, z)$ とゆがみ $\omega(y, z)$ は (3.23), (3.61) 式より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \alpha z, & \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{G} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \alpha y \\ \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{1}{G\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial z} + z, & \frac{\partial \omega}{\partial z} &= -\frac{1}{G\alpha} \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \end{aligned} \quad (3.76)$$

を積分することで得られる。

3.3.1 楕円断面棒のねじり



外周の方程式は,

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (3.77)$$

だから, ϕ として次式を選ぶ。

$$\phi(y, z) = k \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) \quad (3.78)$$

これを (3.24) 式に代入して,

$$k = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\alpha \quad (3.79)$$

だから,

$$\phi(y, z) = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\alpha \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) \quad (3.80)$$

となる。

ねじりモーメント M_x は (3.75) 式より,

$$M_x = -2 \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\alpha \iint_A \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right) dy dz = G\alpha \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (3.81)$$

せん断応力は,

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= -\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}G\alpha\frac{2y}{a^2} = 2\frac{b^2}{a^2+b^2}G\alpha y = \frac{2y}{\pi a^3b}M_x \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}G\alpha\frac{2z}{b^2} = 2\frac{a^2}{a^2+b^2}G\alpha z = \frac{2z}{\pi ab^3}M_x\end{aligned}\quad (3.82)$$

となる。最大せん断応力は、 $a > b$ とすると短軸上 $y = 0, z = \pm b$ において発生し、その大きさは

$$\tau_{\max} = 2\frac{a^2b}{a^2+b^2}G\alpha = \frac{2M_x}{\pi ab^2}\quad (3.83)$$

である。

(3.80) 式を (3.76) 式に代入すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\alpha z\frac{2z}{b^2} = -\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\alpha z \\ -\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\alpha y\frac{2y}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\alpha y\end{aligned}\quad (3.84)$$

を得る。それぞれ積分すると,

$$\begin{aligned}u &= -\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\alpha yz + f(z) \\ u &= -\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\alpha yz + g(y)\end{aligned}\quad (3.85)$$

となるので、 $y = z = 0$ において $u = 0$ として積分定数を定めると,

$$\begin{aligned}u &= -\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\alpha yz \\ &= -\frac{M_x}{\pi G}\frac{a^2-b^2}{a^3b^3}yz\end{aligned}\quad (3.86)$$

となる。

同様にして,

$$\omega(y, z) = -\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}yz = \omega_n(y, z)\quad (3.87)$$

を得る。

(3.35) 式で定義した断面係数を計算してみると、座標原点は図心でありせん断中心と一致してるから,

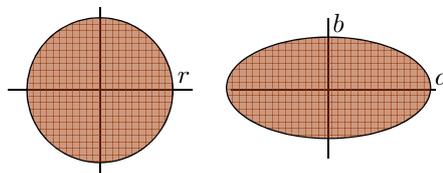
$$S_z = S_y = S_\omega = I_{yz} = 0\quad (3.88)$$

である。その他の断面定数は,

$$A = \pi ab, \quad I_z = \frac{\pi a^3b}{4}, \quad I_y = \frac{\pi ab^3}{4}, \quad I_\omega = \frac{\pi}{24}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 a^3b^3, \quad K = \pi\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}\quad (3.89)$$

となる。

同一重量 (同一断面積) の丸棒 (半径: r) と楕円棒 (長軸: a , 短軸: b) でねじれ角と最大せん断応力を比較してみよう。



$$\pi r^2 = \pi ab \quad \therefore r^2 = ab \quad (3.90)$$

を考慮すると、それぞれのねじれ率 α は、

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{丸棒}} &= \frac{M_x}{GI_p} = \frac{2T}{G\pi r^4} = 2 \frac{M_x}{G\pi a^2 b^2} \\ \alpha_{\text{楕円棒}} &= \frac{a^2 + b^2}{G\pi a^3 b^3} M_x = \frac{a^2 + b^2}{ab} \frac{M_x}{G\pi a^2 b^2} \end{aligned} \quad (3.91)$$

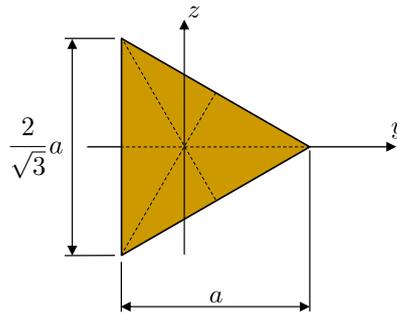
最大せん断応力は、

$$\begin{aligned} \tau_{\text{丸棒}} &= \frac{M_x r}{I_p} = \frac{2M_x}{\pi r^3} = \frac{2M_x}{\pi} \frac{1}{(ab)^{\frac{3}{2}}} \\ \tau_{\text{楕円棒}} &= \frac{2M_x}{\pi ab^2} = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{2M_x}{\pi} \frac{1}{(ab)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (3.92)$$

となる。

$a : b = 2 : 1$ とすると、ねじれ角は 1.25 倍、最大せん断応力は 1.41 倍である。

3.3.2 正三角形断面棒のねじり



ϕ として次式を選ぶ。

$$\phi(y, z) = k \left(y - \sqrt{3}z - \frac{2a}{3} \right) \left(y + \sqrt{3}z - \frac{2a}{3} \right) \left(y + \frac{a}{3} \right) \quad (3.93)$$

これを (3.24) 式に代入して、

$$k = \frac{3}{2a} G\alpha \quad (3.94)$$

だから、

$$\phi(y, z) = \frac{3}{2a} G\alpha \left(y - \sqrt{3}z - \frac{2a}{3} \right) \left(y + \sqrt{3}z - \frac{2a}{3} \right) \left(y + \frac{a}{3} \right) \quad (3.95)$$

となる。

(3.95) 式を (3.76) 式に代入して次式を得る。

$$\omega(y, z) = \frac{1}{2a} (z^3 - 3y^2 z) = \omega_n(y, z) \quad (3.96)$$

(3.35) 式で定義した断面係数を計算してみると、座標原点は図心でありせん断中心と一致してるから、

$$S_z = S_y = S_\omega = I_{yz} = 0 \quad (3.97)$$

である。その他の断面定数は、

$$A = \frac{a^2}{\sqrt{3}}, \quad I_z = I_y = \frac{a^4}{18\sqrt{3}}, \quad I_\omega = \frac{a^6}{5670\sqrt{3}}, \quad K = \frac{a^4}{15\sqrt{3}} \quad (3.98)$$

となる。

3.3.3 薄膜のたわみとの類似

平板の穴に一樣な張力 S で張られた薄膜に一樣な圧力 p が作用したとき、薄膜のたわみ w は次の微分方程式を満足することが知られている。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{p}{S} \quad (3.99)$$

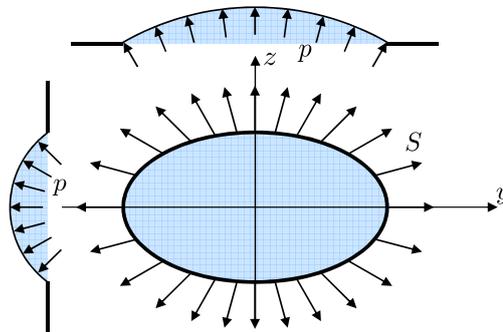


図 3.1: 一樣な張力を受ける薄膜のたわみ

(3.99) 式は (3.24) 式と同じ形である。また、薄膜は周囲を平板に固定されているので w の境界条件は $w = 0$ であって、応力関数 ϕ に対する境界条件 (3.28) 式と同一である。「棒のねじり」と「薄膜のたわみ」の対比を次表に示す。

項目	棒のねじり	薄膜のたわみ
支配方程式	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2G\alpha$	$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{p}{S}$
境界条件	$\phi = 0$	$w = 0$
関数の値	$\phi / 2G\alpha$	$w / \frac{P}{S}$
微係数の値	$\frac{\partial \phi}{\partial n} / 2G\alpha$	$\frac{\partial w}{\partial n} / \frac{P}{S}$

ここで、

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (3.100)$$

より、

$$\tau = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{2G\alpha}{\frac{P}{S}} \frac{\partial w}{\partial n} \quad (3.101)$$

したがって、棒をねじったときに生じるせん断応力の大きさは、同じ形状の断面の薄膜のたわみ角 (傾斜) に比例する。

ところで、薄膜の境界における張力の垂直成分の合計は、薄膜が受ける圧力と面積の積に等しいから、

$$\oint \frac{\partial w}{\partial n} S ds = pA \quad \therefore \oint \frac{\partial w}{\partial n} ds = \frac{pA}{S} \quad (3.102)$$

次式が得られる。

$$\oint \frac{\partial w}{\partial n} ds = \oint \frac{\tau}{2G\alpha} \frac{p}{S} ds = \frac{pA}{S} \quad \therefore \oint \tau ds = 2G\alpha A \quad (3.103)$$

3.3.4 サンプナンのねじりのまとめ

サンプナンのねじりについて整理しておこう。

● サンプナンのねじりに関する3つの仮定

- 任意の断面の基準位置に対するねじれ角 $\phi - \phi_0$ は、基準位置からの距離 $x - x_0$ に比例する
- 断面は位置 x にかかわらず同じ形に変形する
- 負荷されるねじりトルクは静的に等価であれば、一定距離離れた位置における効果は同等とみなせる (サンプナンの原理)

● 変位関数

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha\omega(y, z) \\ v(x, y, z) &= -z\Theta(x) = -\alpha xz \\ w(x, y, z) &= y\Theta(x) = \alpha xy \end{aligned} \quad (3.60)$$

● 応力成分

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \alpha z \right) = G\alpha \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right) \\ \tau_{zx} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \alpha y \right) = G\alpha \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right) \\ \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

・ 応力の x 方向のつり合い式と境界条件

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial n} &= \Theta'(x)(zn_y - yn_z) : \text{境界条件} \end{aligned} \quad (3.21)$$

● ねじりの応力関数 $\phi(y, z)$

$$\phi(y, z) = \int_{A(y_0, z_0)}^{B(y, z)} (-\tau_{zx} dy + \tau_{xy} dz) \quad (3.22)$$

$$\tau_{zx} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -G\Theta' \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right) \quad (3.23)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = G\Theta' \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2G\Theta' \quad (3.24)$$

・ねじりの応力関数の境界条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} s_z - \frac{\partial \phi}{\partial y} s_y = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0 \quad \therefore \phi = \text{Constant} \quad (3.27)$$

中実断面の場合は,

$$\phi = 0 \quad (3.28)$$

● サンプナンのねじり定数 K

$$\begin{aligned} K &= \iint \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right)^2 \right\} dydz = \iint \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right) y - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right) z \right\} dydz \\ &\therefore \iint \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right\} dydz = \iint \left(z \frac{\partial \omega}{\partial y} - y \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) dydz \end{aligned} \quad (3.64)$$

● ねじりモーメント M_x とねじり率 α の関係

$$M_x = GK\alpha \quad (3.65)$$

● 解析の手順

1. はりの断面の境界でゼロ ((3.28) 式), かつ 2 階微分の和が定数 ((3.24) 式) になる関数 $\phi(y, z)$ を見つける
2. (3.23) 式から応力成分 τ_{xy}, τ_{zx} を計算する。
3. (3.23) 式からゆがみ関数 $\omega(y, z)$ を求める。
4. (3.64) 式からねじり定数 K を計算する。
5. (3.65) 式からねじり率 α 計算する。

一般に, 中実断面に関する応力関数 $\phi(y, z)$ やゆがみ関数 $\omega(y, z)$ を見出すのは容易ではない。次回は, 有限要素法を利用した解析法について検討する。

● 練習問題

正三角形断面棒をねじったときの稜線におけるせん断応力の大きさを, 薄膜のたわみとの類似から考えてみよう。

3.4 参考文献

今回の資料は下記の文献を参考にしました。

- [1] 梁理論の精密化に関する二、三の試み (その 1), 川井忠彦, 生産研究, 第 25 巻第 6 号 (1973.6)
- [2] 梁理論の精密化に関する二、三の試み (その 2), 川井忠彦, 生産研究, 第 25 巻第 7 号 (1973.7)
- [3] 材料力学 (下), 寺沢一雄, 海文堂, (1967)
- [4] 弾性学, 鷗戸口英善, 共立出版, (1975)
- [5] マトリックス法による棒のねじり解析, 川井忠彦, 生産研究, 第 20 巻第 5 号 (1968.5)

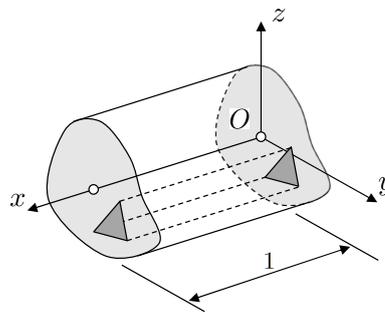
第4章 有限要素法プログラムの作成

プログラムの仕様

- 静的弾性2次元問題
- 4節点アイソパラメトリック要素
- 言語は自由

4.6 ゆがみ関数

任意形状断面のゆがみ関数を有限要素法で求める方法について検討しよう。



一様断面の棒から長さが"1"の部分を取り出して、三角柱要素の集合体としてモデル化する。両端の相対的なねじれ角を α とすると、長さ"1"としているので α はねじれ率でもあって、しかも、各三角柱で共通である。

棒の内部の点 $P(x, y, z)$ の変位は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha \omega(y, z) \\ v(x, y, z) &= -\alpha z x \\ w(x, y, z) &= \alpha x y \end{aligned} \quad (4.1)$$

三角柱要素の節点変位ベクトルは \mathbf{d} , u_i, u_j, u_k を i, j, k 点における x 方向の変位として次式で与えられる。

$$\mathbf{d} = \left\{ \alpha \quad u_i \quad u_j \quad u_k \right\}^T \quad (4.2)$$

α がわかれば、式から変位 v, w を計算できるのでこれを考える必要がない。

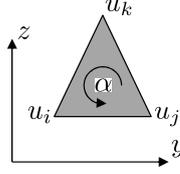
変位ベクトルに対応する節点力ベクトル \mathbf{f} は次式で与えられる。

$$\mathbf{f} = \left\{ m \quad X_i \quad X_j \quad X_k \right\}^T \quad (4.3)$$

要素内の変位 $u(y, z)$ を次式で仮定する。

$$u(y, z) = ay + bz + c \quad (4.4)$$

ここで, a, b, c は未定係数である。



(4.4) 式より, 節点変位は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_i & z_i & 1 \\ 0 & y_j & z_j & 1 \\ 0 & y_k & z_k & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{b} \quad (4.5)$$

上式より,

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{d} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_j - z_k & z_k - z_i & z_i - z_j \\ 0 & y_k - y_j & y_i - y_k & y_j - y_i \\ 0 & -y_k z_j + y_i z_k & y_k z_i - y_i z_k & -y_j z_i + y_i z_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

ここで, A は三角形要素の面積である。

ひずみ成分は,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a - \alpha z \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = b + \alpha y \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -z & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

$$= \begin{bmatrix} -z & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_j - z_k & z_k - z_i & z_i - z_j \\ 0 & y_k - y_j & y_i - y_k & y_j - y_i \\ 0 & -y_k z_j + y_i z_k & y_k z_i - y_i z_k & -y_j z_i + y_i z_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{b} = \mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{d}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -2Az & z_j - z_k & z_k - z_i & z_i - z_j \\ 2Ay & y_k - y_j & y_i - y_k & y_j - y_i \end{bmatrix}$$

応力成分は,

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{d} \quad (4.8)$$

$$= \frac{G}{2A} \begin{bmatrix} -2Az & z_j - z_k & z_k - z_i & z_i - z_j \\ 2Ay & y_k - y_j & y_i - y_k & y_j - y_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix}$$

(4.5),(4.7),(4.8) 式を仮想仕事の原理に代入して三角柱要素の剛性マトリックスを得る。

$$\begin{aligned}
\delta U &= \delta V \\
\int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV &= \mathbf{d}^T \mathbf{f} \\
\int_V [\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{d}]^T \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{d} dV &= \mathbf{d}^T \mathbf{f} \\
\mathbf{d}^T \int_V [\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}]^T \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{d} dV &= \mathbf{d}^T \mathbf{f} \\
\mathbf{k}\mathbf{d} &= \mathbf{f} \\
\mathbf{k} &= \int_V [\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}]^T \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{d} dV
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
k_{11} &= G \int_A (y^2 + z^2) dA = GI_p \\
k_{12} &= \frac{G}{2A} \int_A \{y(y_k - y_j) + z(z_k - z_j)\} dA = \frac{G}{2A} \{S_z(y_k - y_j) + S_y(z_k - z_j)\} \\
k_{13} &= \frac{G}{2A} \int_A \{y(y_i - y_k) + z(z_i - z_k)\} dA = \frac{G}{2A} \{S_z(y_i - y_k) + S_y(z_i - z_k)\} \\
k_{14} &= \frac{G}{2A} \int_A \{y(y_j - y_i) + z(z_j - z_i)\} dA = \frac{G}{2A} \{S_z(y_j - y_i) + S_y(z_j - z_i)\} \\
k_{22} &= \frac{G}{4A} \{(y_k - y_j)^2 + (z_j - z_k)^2\} \\
k_{23} &= \frac{G}{4A} \{y_G(y_i - y_k)(y_k - y_j) + z_G(z_j - z_k)(z_k - z_i)\} \\
k_{24} &= \frac{G}{4A} \{y_G(y_k - y_j)(y_j - y_i) + z_G(z_i - z_j)(z_j - z_k)\} \\
k_{33} &= \frac{G}{4A} \{y_G(y_i - y_k)^2 + z_G(z_k - z_i)^2\} \\
k_{34} &= \frac{G}{4A} \{y_G(y_j - y_i)(y_i - y_k) + z_G(z_i - z_j)(z_k - z_i)\} \\
k_{44} &= \frac{G}{4A} \{y_G(y_j - y_i)^2 + z_G(z_i - z_j)^2\} \\
A &= \int_A dA, \quad S_y = \int_A z dA = z_G A, \quad S_z = \int_A y dA = y_G A \\
z_G &= \frac{z_i + z_j + z_k}{3}, \quad y_G = \frac{y_i + y_j + y_k}{3} \\
I_p &= \int_A (y^2 + z^2) dA \cong (y_G^2 + z_G^2) A
\end{aligned} \tag{4.10}$$

ここで、(4.3) 式の m について考えてみよう。(4.7),(4.8) 式より、

$$\begin{aligned}
m &= \left[\int_A (y^2 + z^2) dA \right] \alpha + \left[\frac{G}{2A} \int_A \{y(y_k - y_j) + z(z_k - z_j)\} dA \right] u_i \\
&\quad + \left[\frac{G}{2A} \int_A \{y(y_i - y_k) + z(z_i - z_k)\} dA \right] u_j \\
&\quad + \left[\frac{G}{2A} \int_A \{y(y_j - y_i) + z(z_j - z_i)\} dA \right] u_k
\end{aligned} \tag{4.11}$$

(4.10) 式から、

$$m = \int_A (-z\tau_{xy} + y\tau_{zx}) dA \tag{4.12}$$

となって、 m は長さ”1”の三角柱要素に作用するねじりモーメントに相当することがわかる。

三角柱要素の剛性マトリックスを合成して棒全体の剛性マトリックスをつくる。このとき、すべての要素に共通の変位成分 α が含まれているのが通常の有限要素法と異なる点である。

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \\ M_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & [\mathbf{K}_{AA}] & [\mathbf{K}_{AB}] \\ & & \\ & & \\ & & \\ [\mathbf{K}_{AB}]^T & & [\mathbf{K}_{BB}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ \alpha \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

$\{\mathbf{X}\} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $\{\mathbf{u}\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ とおくと,

$$\{\mathbf{X}\} = [\mathbf{K}_{AA}]\{\mathbf{u}\} + \alpha[\mathbf{K}_{AB}] \quad (4.14)$$

ところで、棒にはねじりモーメント M_t のみが作用し、 X 方向の力は作用していない $\{\mathbf{X}\} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} = \{0, 0, \dots, 0\}$ から、(4.15) 式より $\{\mathbf{u}\}$ が求まる。

$$\begin{aligned} -\alpha[\mathbf{K}_{AB}] &= [\mathbf{K}_{AA}]\{\mathbf{u}\} \\ \therefore \{\mathbf{u}\} &= -\alpha[\mathbf{K}_{AA}]^{-1}[\mathbf{K}_{AB}] \end{aligned} \quad (4.15)$$

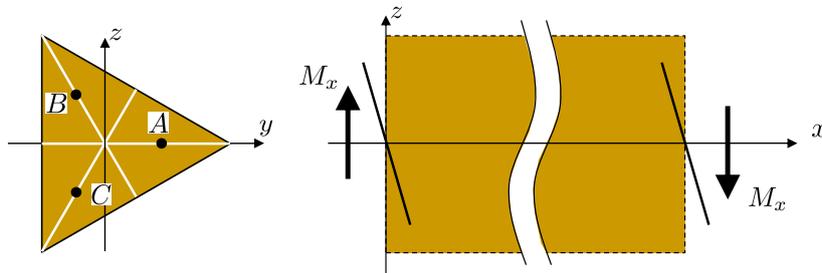
ねじりモーメント M_t は (4.13) 式より次のように求まる。

$$M_t = [\mathbf{K}_{AB}]^T \{\mathbf{u}\} + [\mathbf{K}_{BB}]\alpha = \left([\mathbf{K}_{BB}] - [\mathbf{K}_{AB}]^T [\mathbf{K}_{AA}]^{-1} [\mathbf{K}_{AB}]\right)\alpha \quad (4.16)$$

変位 $\{\mathbf{u}\}$ がわかれば、ひずみと応力成分は (4.7),(4.8) 式より計算できるが、要素内で一定ではなく x と y の 1 次関数になっている。

これは、三角形要素を利用して 2 次元問題を解析する場合と大きく異なる点である。

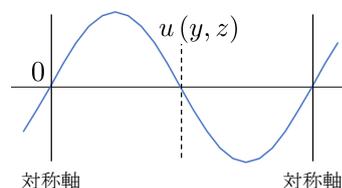
断面形状が楕円や三角形など対称軸を持つ棒をねじったときの変形 $u(y, z)$ について考えてみよう。



図心から等距離にあっていずれも対称軸上にある 3 点 A, B, C の変位は、座標軸を 120° 回転させれば状況は同じだから同一である。棒の反対側の端面も事情は同じである。したがって、これらの点が $+$ に変位するとすれば反対側も $+$ で、棒は伸びることになる。これは、 x 方向の外力はゼロという仮定に矛盾する。したがって、3 点 A, B, C だけでなく対称軸上の点は変位はゼロである。

対称軸上にない点の変位を上図の右図を参考にして考えよう。 $+$ 側に変位するとすれば、変形の対称性から、反対側の端面の対応する点は $-$ 側に変位して 2 点間の棒の長さ方向の距離は変わらず、 x 方向の力はゼロという仮定に反しない。

したがって、棒の断面のゆがみは、対称軸から対称軸までを 1 周期として変化し、対称軸とその中央でゼロになるものと考えることができる。



このように、断面形状に対称軸をもつ棒のねじりを解析する場合は、対称軸に囲まれる部分あるいはその半分を取り出して、境界に「 x 方向の変位 $u(y, z)$ がゼロ」という対称境界条件を設定すればよい。

(4.13) 式は次のように書ける。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \\ M_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{AA}] & [\mathbf{K}_{AB}] & [\mathbf{K}_{AC}] \\ [\mathbf{K}_{AB}]^T & [\mathbf{K}_{BB}] & [\mathbf{K}_{BC}] \\ [\mathbf{K}_{AC}]^T & [\mathbf{K}_{BC}]^T & [\mathbf{K}_{CC}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \\ \alpha \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

ここで、 \mathbf{u} は対称軸上にない点の変位ベクトル、 \mathbf{f} は対称軸上の点に作用する x 方向の力である。 x 方向の外力はないが、対称軸を含む面には内力としてのせん断力が作用していて、対称軸で切り離れたときに現れる力を \mathbf{f} とした。

(4.17) 式より、

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{AA}] \mathbf{u} + [\mathbf{K}_{AC}] \alpha &= 0 \\ [\mathbf{K}_{AB}]^T \mathbf{u} + [\mathbf{K}_{BC}] \alpha &= \mathbf{f} \\ [\mathbf{K}_{AC}]^T \mathbf{u} + [\mathbf{K}_{CC}] \alpha &= M_t \end{aligned} \quad (4.18)$$

だから、 x 方向の変位 \mathbf{u} (ゆがみ)、ねじれ率 α 、せん断力 \mathbf{f} が次式のように求まる。

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\alpha [\mathbf{K}_{AA}]^{-1} [\mathbf{K}_{AC}] \\ \alpha &= \frac{M_t}{-[\mathbf{K}_{AC}]^T [\mathbf{K}_{AA}]^{-1} [\mathbf{K}_{AC}] + [\mathbf{K}_{CC}]} \\ \mathbf{f} &= \alpha \left(-[\mathbf{K}_{AB}]^T [\mathbf{K}_{AA}]^{-1} [\mathbf{K}_{AC}] + [\mathbf{K}_{BC}] \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

